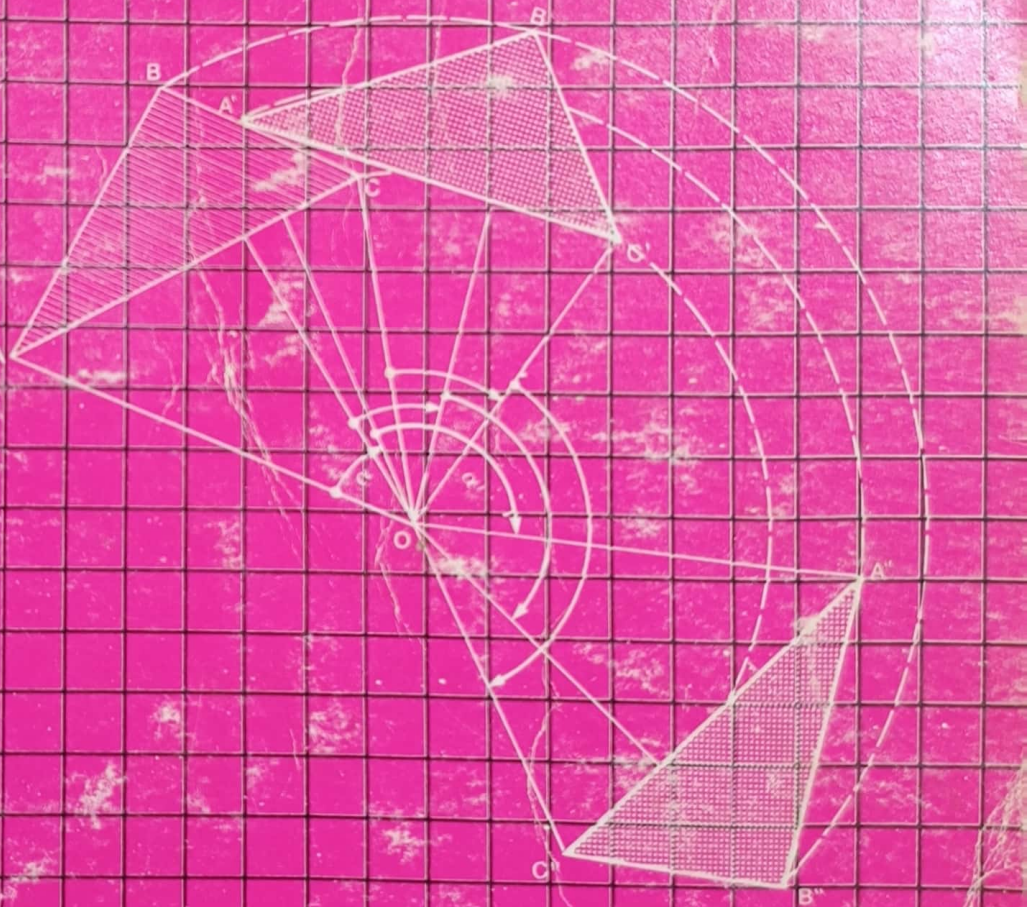
MATEMÁTICA 2

Ana María BOGANI
Elsa Dolores ESTÉVEZ de DESTUET
Mary Gloria OHARRIZ



PLUS ULTRA

Escaneado con CamScanner

Ana María BOGANI
Elsa Dolores ESTÉVEZ de DESTUET
Mary Gloria OHARRIZ

GENTILEZA
DE
EDITORIAL PLUS ULTRA

PLUS ULTRA

MATEMÁTICA 2

2º AÑO CICLO BÁSICO

Escaneado con CamScanner

I.S.B.N. 950-21-0789-6

Impreso en la Argentina — Printed in Argentina
Queda hecho el depósito que previene la ley 11.723

© 1986 by Editorial Plus Ultra
Viamonte 1755 - Buenos Aires (1055)

Escaneado con CamScanner

2. TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

De las transformaciones que pueden aplicarse a los puntos del plano se estudian movimientos que sólo cambian la posición de las figuras conservando su forma y su tamaño.

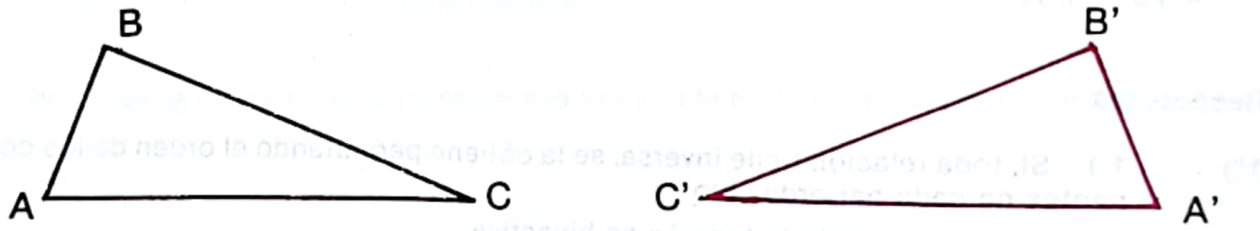
Se definen y luego se relacionan simetrías, traslaciones y rotaciones.

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

En un plano pueden aplicarse movimientos a sus puntos.

Todo movimiento en el plano es una **transformación del plano** en sí mismo porque a cada punto le hace corresponder otro punto, de manera tal que el transformado de un segmento, es un segmento, la de una figura es una figura.

Las simetrías, la traslación, la rotación, son movimientos tales que las figuras a las que se aplican y sus transformadas resultan congruentes.



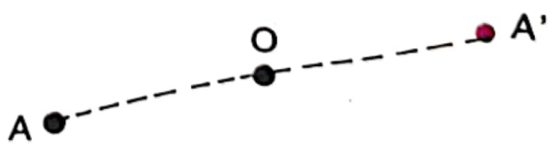
Al desplazar por un movimiento en el plano al $\hat{ABC}$, se obtiene el $\hat{A'B'C'}$ que es congruente al dado.

SIMETRIA CENTRAL

La **simetría central** o simetría con respecto a un centro, es un movimiento en el plano.

Definición: Dos puntos **A** y **A'** son **simétricos** con respecto a un punto O elegido como **centro de simetría** sí y sólo sí A y A' pertenecen a semirrectas opuestas de origen **O**, y equidistan de **O**.

S_O
simetría
de centro O



Escaneado con CamScanner

O centro de simetría
$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$ opuestas
$\overline{AO} = \overline{OA'}$

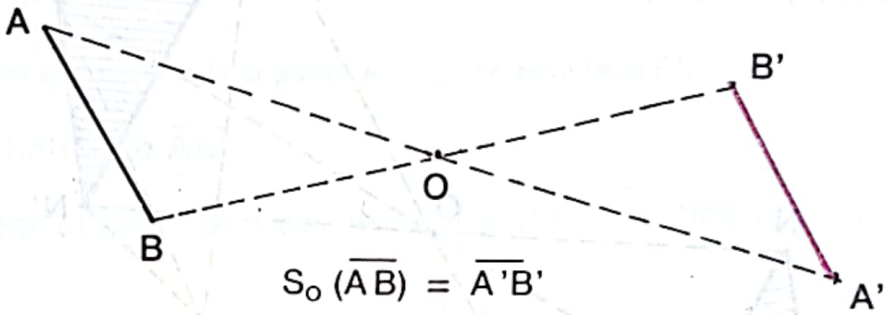
$\Longrightarrow$ A y A' simétricos con respecto a O, o bien: A' es el transformado de A por la simetría de centro O

Notación: $S_O(A) = A'$

Se lee: simetría de centro O aplicada al punto A da como resultado A'

- O es el punto medio de $\overline{AA'}$.

Para hallar el simétrico de un segmento con respecto a un centro se aplica la simetría a sus extremos.



$S_O(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$

- Los segmentos simétricos son congruentes.

En efecto, si se comparan

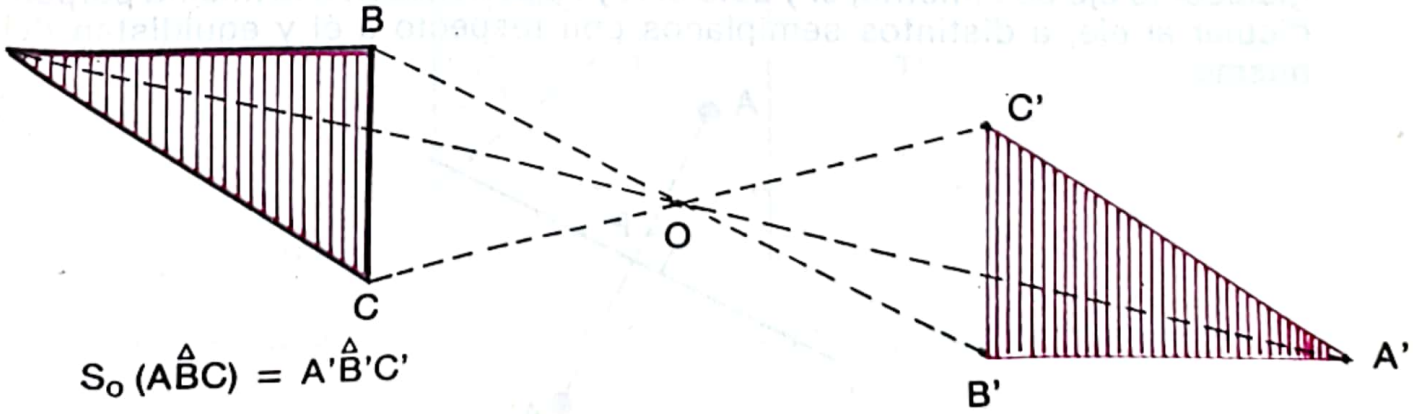
$A\hat{O}B$ y $A'\hat{O}B'$

$\overline{AO} = \overline{OA'}$ por definición de puntos simétricos
$\overline{OB} = \overline{OB'}$ por definición de puntos simétricos
$A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$ opuestos por el vértice

Por 1er. criterio de congruencia de triángulos resulta $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$, en consecuencia sus elementos homólogos son congruentes, en particular:

$\overline{AB}$ (op. al $A\hat{O}B$) = $\overline{A'B'}$ (op. al $A'\hat{O}B'$)

Para hallar la figura simétrica de una dada se aplica la simetría a los vértices de la misma.



$S_O(\hat{ABC}) = A'\hat{B}'C'$

Escaneado con CamScanner

• Puede demostrarse que las figuras simétricas son congruentes.

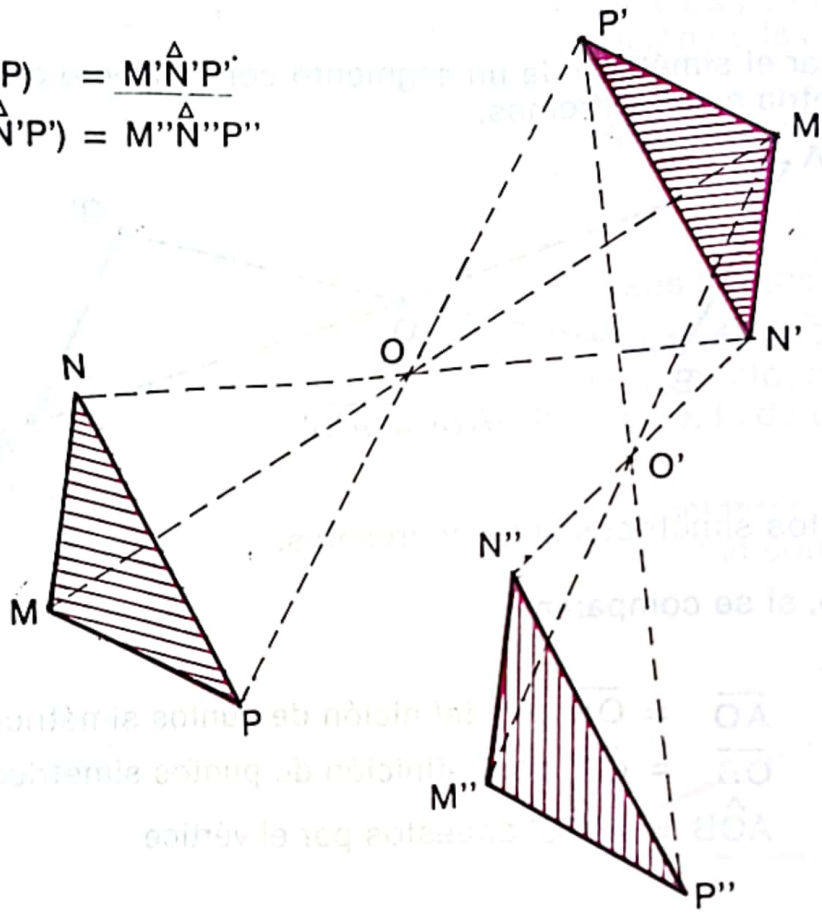
Ejercicio:

1°) Dados O y O', aplicar sucesivamente simetrías de centro O y O' a un $\overset{\Delta}{MNP}$

Respuesta

$S_O(\overset{\Delta}{MNP}) = \overset{\Delta}{M'N'P'}$

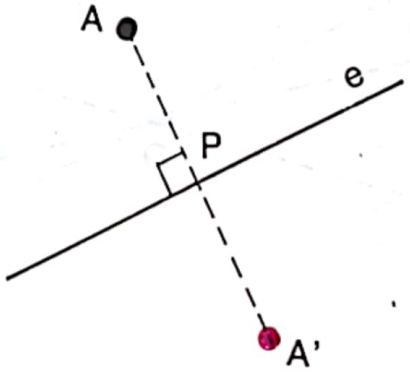
$S_{O'}(\overset{\Delta}{M'N'P'}) = \overset{\Delta}{M''N''P''}$



SIMETRIA AXIAL

La **simetría axial** o simetría con respecto a un eje es otro movimiento en el plano.

Definición: Dos puntos **A** y **A'** son simétricos con respecto a una recta **e** elegida como eje de simetría, si y sólo si A y A' pertenecen a la misma perpendicular al eje, a distintos semiplanos con respecto a él y equidistan del mismo.



Escaneado con CamScanner

S_e
simetría
de
eje e

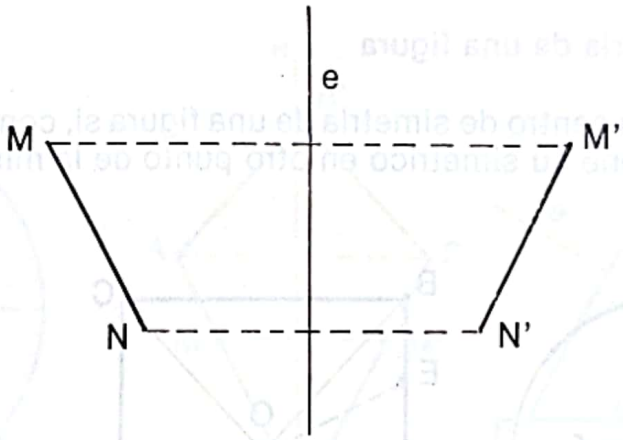
e eje de simetría
$\overline{AA'} \perp e$
$\overline{AP} = \overline{PA'}$

$\Longrightarrow$ A y A' simétricos con respecto a e
o bien: A' es el transformado de A
por la simetría de eje e

Notación: $S_e(A) = A'$
Se lee: simetría de eje **e** aplicada al punto **A** da como resultado **A'**.

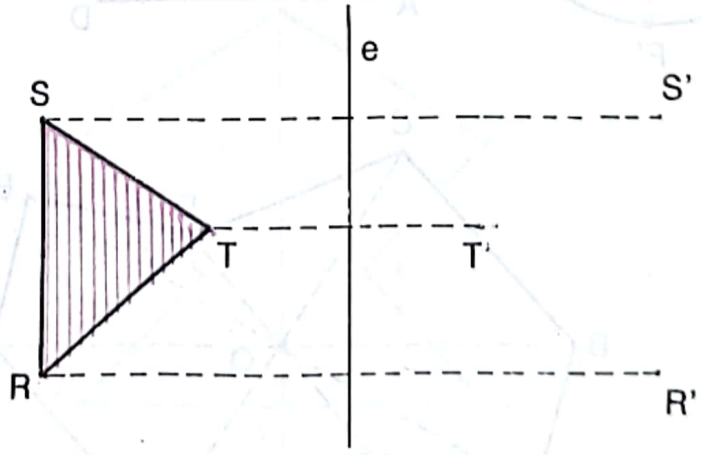
e es mediatriz de $\overline{AA'}$

Para hallar el simétrico de un segmento se aplica la simetría a sus extremos.



$S_e(\overline{MN}) = (\overline{M'N'})$

Para hallar la figura simétrica de una dada se aplica la simetría a los vértices.



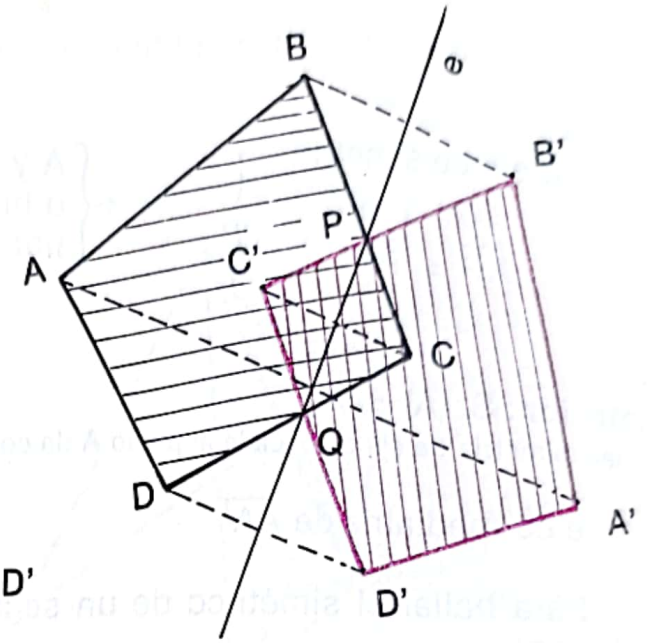
$S_e(\overset{\triangle}{RST}) = \overset{\triangle}{R'S'T'}$

- Las figuras simétricas con respecto a un eje son congruentes.

Escaneado con CamScanner

Ejercicio

2°) Aplicar simetría axial al cuadrilátero ABCD tal que $e \cap \overline{BC} = \{P\}$ y $e \cap \overline{CD} = \{Q\}$
Indicar los simétricos de P y Q.



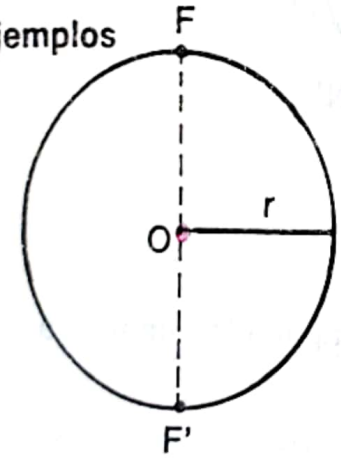
Respuesta:

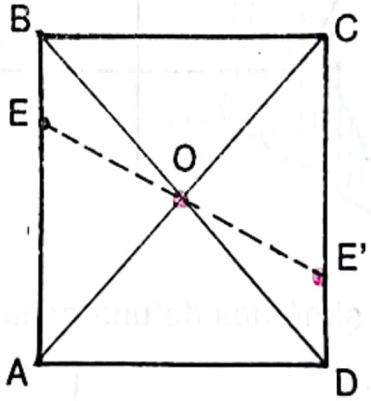
S_e (cuadril. ABCD) = cuadril. A'B'C'D'
S_e (P) = P S_e (Q) = Q

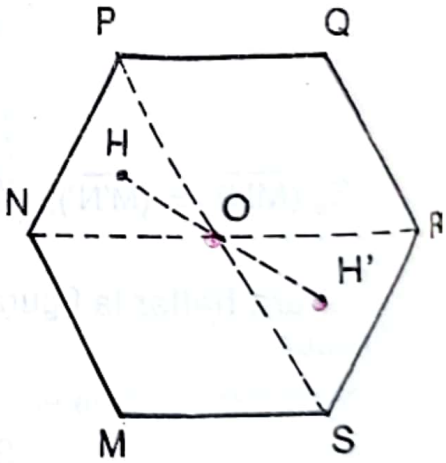
Centro de simetría de una figura

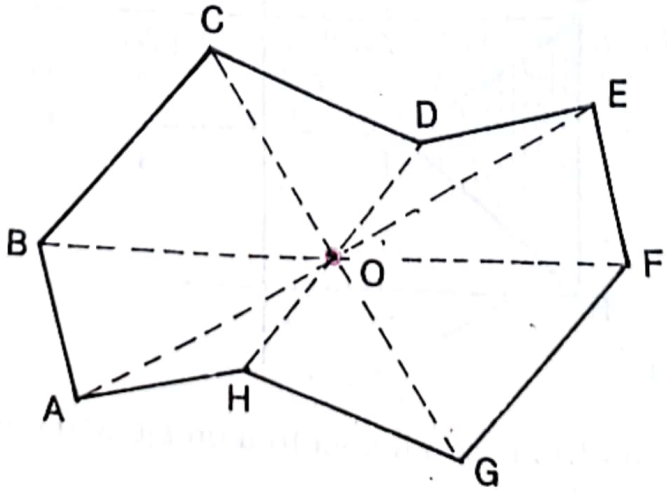
Un punto es centro de simetría de una figura si, con respecto a él, todo punto de ella tiene su simétrico en otro punto de la misma.

Ejemplos









Escaneado con CamScanner

- En $C_{(O,r)}$ el centro de simetría es su centro: O

Así $S_O(F) = F' / F \wedge F' \in C_{(O,r)}$

- En el cuadrado ABCD el centro de simetría es el punto de intersección de sus diagonales: O

Así $S_O(B) = D$, $S_O(D) = B$, $S_O(E) = E'$

- En el hexágono regular MNPQRS el centro de simetría es el centro de la figura.

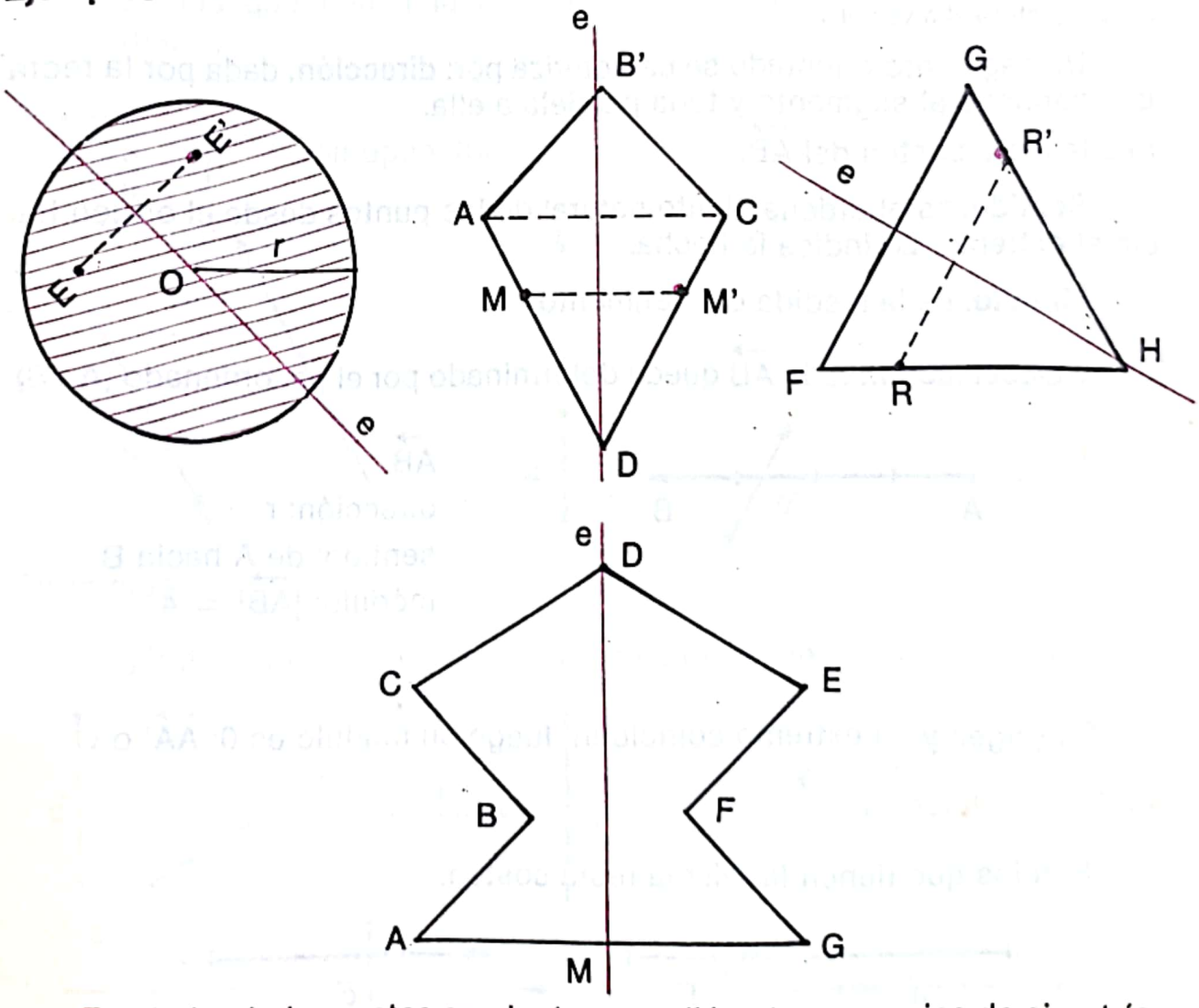
Así $S_O(R) = N$, $S_O(H) = H'$

- Los polígonos regulares de número par de lados, tienen centro de simetría.

Eje de simetría de una figura

Una recta es eje de simetría de una figura si con respecto a él todo punto de ella tiene su simétrico en otro punto de la misma.

Ejemplos



En el círculo las rectas que incluyen a diámetros son ejes de simetría. $S_e(E) = E'$.

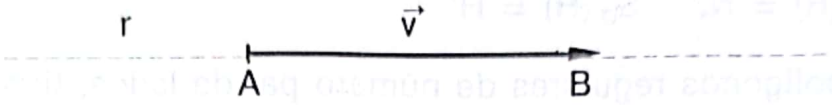
Escaneado con CamScanner

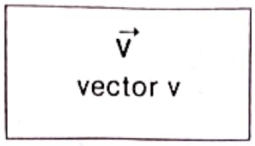
En el romboide ABCD la recta que incluye a la diagonal principal del romboide es su eje de simetría $S_e(A) = C$, $S_e(B) = B$, $S_e(C) = A$, $S_e(D) = D$, $S_e(M) = M'$.

En el $F\hat{G}H$ equilátero las mediatrices son ejes de simetría. $S_e(F) = G$, $S_e(H) = H$, $S_e(R) = R'$.

Vectores

Todo segmento orientado es un **vector**.





A es el origen del vector, B es el extremo.

Notación: $\overrightarrow{AB}$ o $\vec{v}$

Se lee: vector AB o vector v

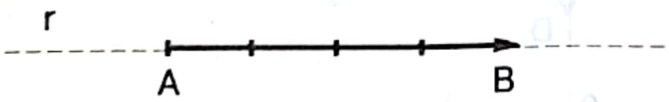
Un segmento orientado se caracteriza por: **dirección**, dada por la recta que contiene al segmento y toda paralela a ella.

r es la recta sostén del $\overrightarrow{AB}$.

Sentido, es el ordenamiento natural de los puntos desde el origen hacia el extremo. Lo indica la flecha.

Módulo, es la medida del segmento.

- **Observación:** todo $\overrightarrow{AB}$ queda determinado por el par ordenado (A ; B).



$\overrightarrow{AB}$
dirección: r
sentido: de A hacia B
módulo: $|\overrightarrow{AB}| = 4$

Vector nulo

Su origen y su extremo coinciden, luego su módulo es 0: $\overrightarrow{AA'}$ o $\vec{O}$

Vectores colineales

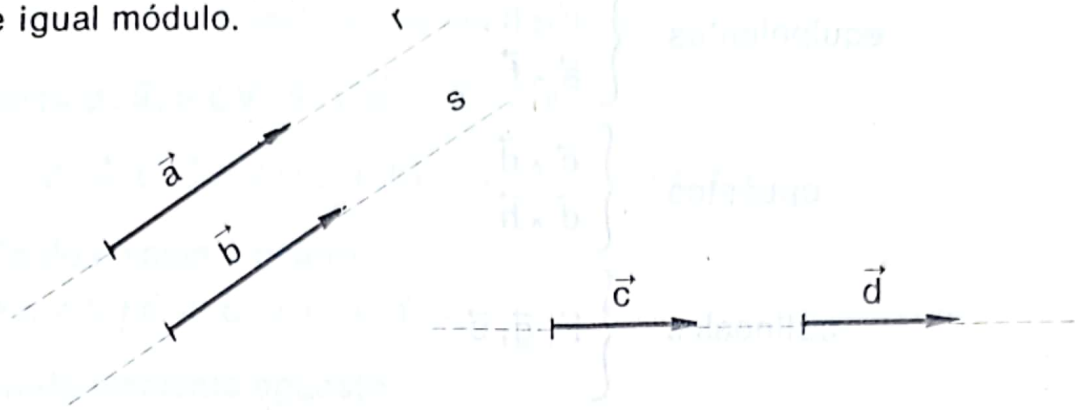
Son los que tienen la misma recta sostén.

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ son colineales

Escaneado con CamScanner

Vectores equipolentes

Dos vectores son equipolentes si tienen la misma dirección, el mismo sentido e igual módulo.



$r \parallel s$
$|\vec{a}| = |\vec{b}|$
sent. $\vec{a}$ = sent. $\vec{b}$

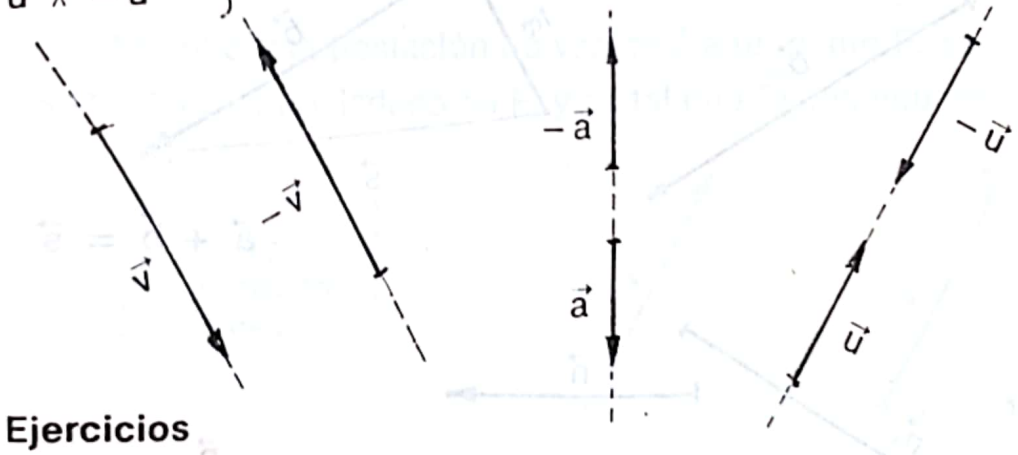
$\left.\begin{matrix}\vec{a} \text{ y } \vec{b} \\ \vec{c} \text{ y } \vec{d}\end{matrix}\right\}$ son equipolentes

Vectores opuestos

Son los que tienen la misma dirección, igual módulo y sentidos opuestos.

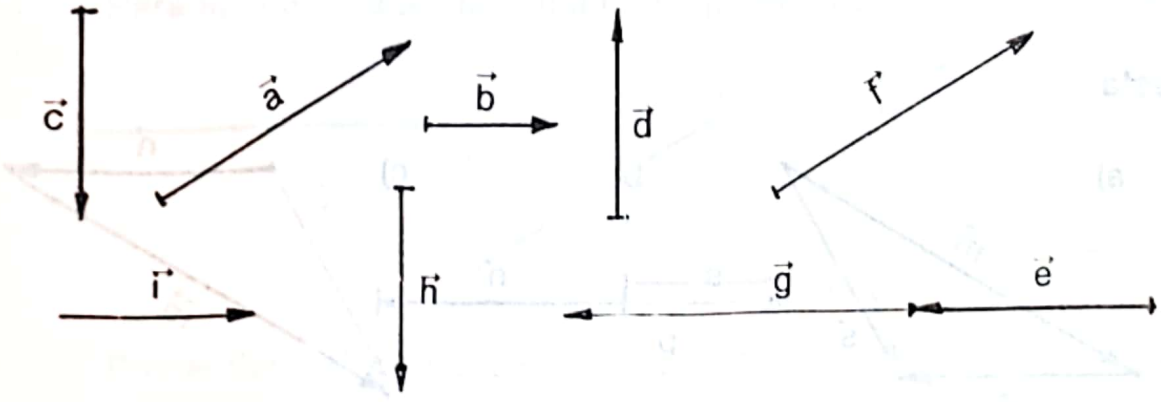
$\vec{v} \wedge -\vec{v}$
$\vec{a} \wedge -\vec{a}$
$\vec{u} \wedge -\vec{u}$

son opuestos



Ejercicios

3°) Indicar los vectores equipolentes, los opuestos y los colineales.



Escaneado con CamScanner

Respuesta:

equipolentes $\begin{cases} \vec{c} \wedge \vec{h} \\ \vec{a} \wedge \vec{f} \end{cases}$

opuestos $\begin{cases} \vec{c} \wedge \vec{d} \\ \vec{d} \wedge \vec{h} \end{cases}$

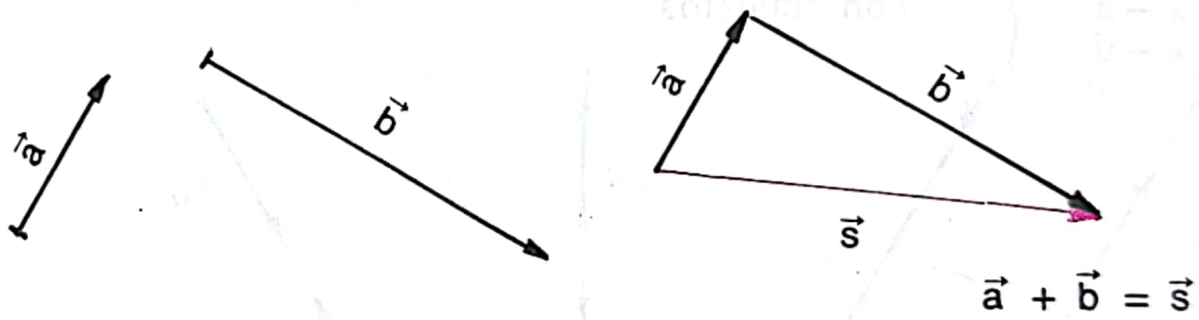
colineales $\begin{cases} \vec{f}, \vec{g}, \vec{e} \end{cases}$

4°) Dibujar un $\vec{a}$, tres vectores equipolentes a $\vec{a}$, dos opuestos a $\vec{a}$.

Adición en el conjunto de los vectores

Al aplicar la adición a dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el resultado es otro vector $\vec{s}$.

La suma se obtiene construyendo vectores respectivamente equipolentes a los sumandos tales que el origen del segundo coincida con el extremo del primero, entonces la suma $\vec{s}$ tiene como origen el del primer vector y como extremo el del segundo vector.

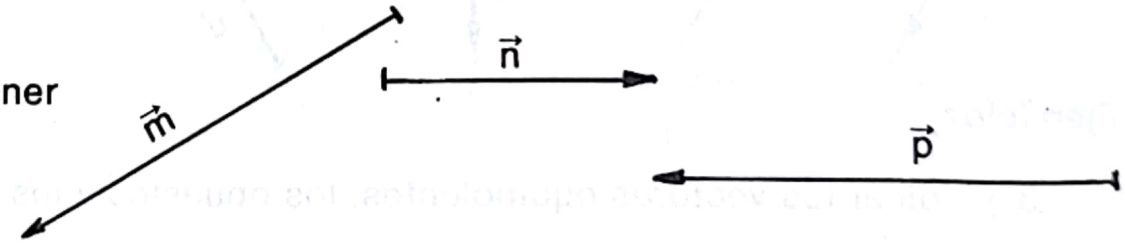


$\vec{a} + \vec{b} = \vec{s}$

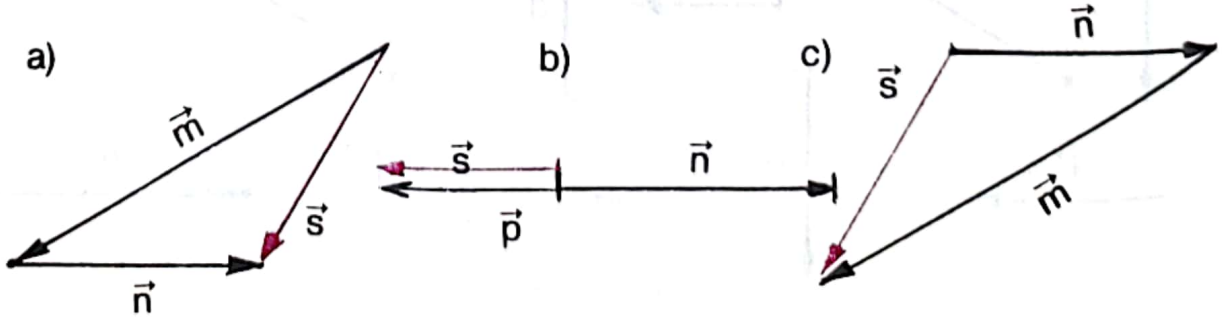
Ejercicio

5°) Obtener

a) $\vec{m} + \vec{n}$
b) $\vec{n} + \vec{p}$
c) $\vec{n} + \vec{m}$



Respuesta



Escaneado con CamScanner

Propiedades de la adición en el conjunto de los vectores

El conjunto de los vectores se simboliza V.

Ley de cierre $\forall : \vec{a}, \vec{b} \in V : \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{c} \in V$

Asociativa $\forall : \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V : (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Existencia de elemento neutro

$\exists\, \vec{o} \in V \forall\, \vec{a} \in V / \vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$

Existencia de elemento opuesto

$\forall\, \vec{a} \in V, \exists\, -\vec{a} \in V / \vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{o}$

Conmutativa

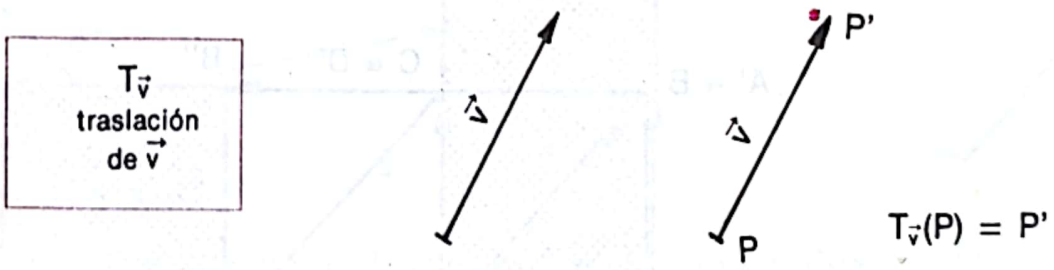
$\forall : \vec{a}, \vec{b} \in V : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

TRASLACION

Es también un movimiento en el plano.

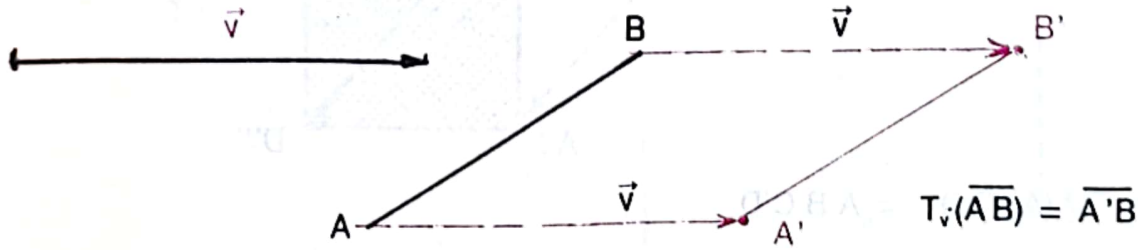
Para aplicar una traslación se elige un vector, que se llama **vector de traslación.**

Al aplicar la traslación de vector $\vec{v}$ a un punto P, se obtiene otro punto P'. P' es el trasladado de P, y es tal que $\overrightarrow{PP'}$ es equipolente a $\vec{v}$.



Se lee: traslación de $\vec{v}$ aplicada a P da como resultado P'

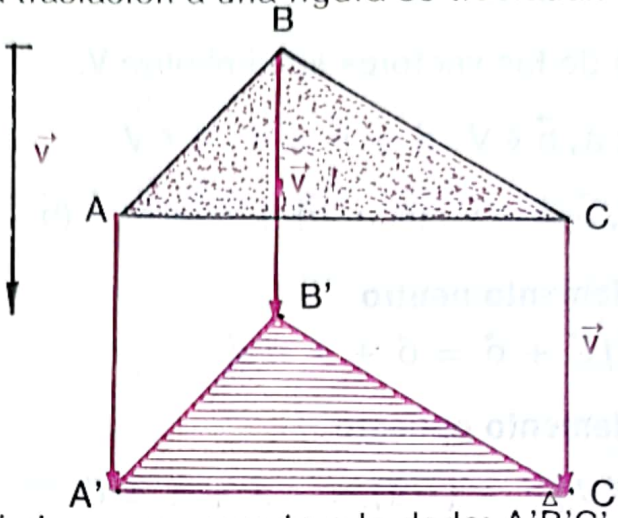
Para aplicar una traslación a un segmento se trasladan sus extremos.



Puede demostrarse que el segmento trasladado es congruente con el dado: $\overline{A'B'} = \overline{AB}$

Escaneado con CamScanner

Para aplicar una traslación a una figura se trasladan los vértices de la misma.



$T_{\vec{v}}(\hat{ABC}) = \hat{A'B'C'}$

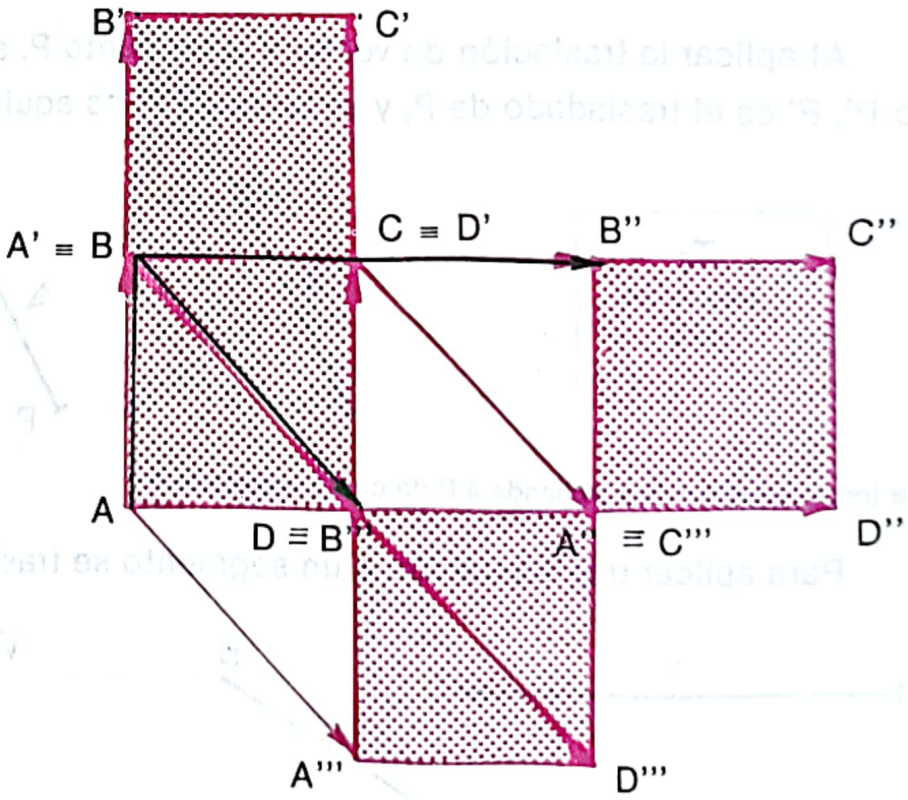
La figura trasladada es congruente a la dada: $\hat{A'B'C'} = \hat{ABC}$.

Ejercicio

6°) Dado un cuadrado ABCD aplicarle:

a) $T_{\overrightarrow{AB}}$ b) $T_{2\,.\,\overrightarrow{BC}}$ c) $T_{\overrightarrow{BD}}$

Respuesta



a) $T_{\overrightarrow{AB}}(ABCD) = A'B'C'D'$

b) $T_{2\,.\,\overrightarrow{BC}}(ABCD) = A''B''C''D''$

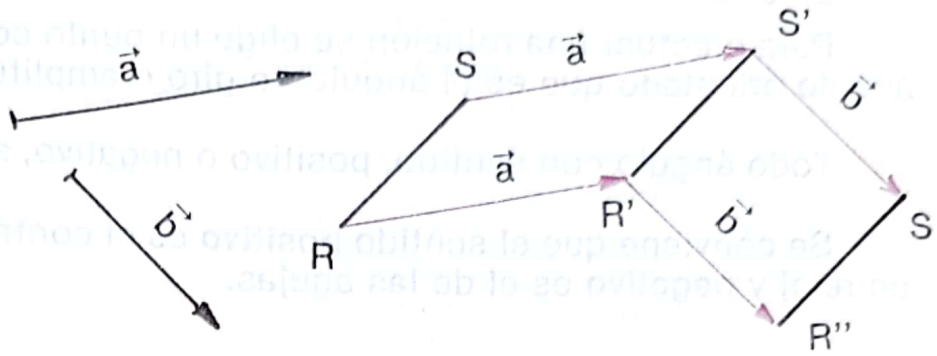
c) $T_{\overrightarrow{BD}}(ABCD) = A'''B'''C'''D'''$

Escaneado con CamScanner

Composición de traslaciones

Componer dos traslaciones es aplicarlas sucesivamente.

$T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$
traslación
compuesta

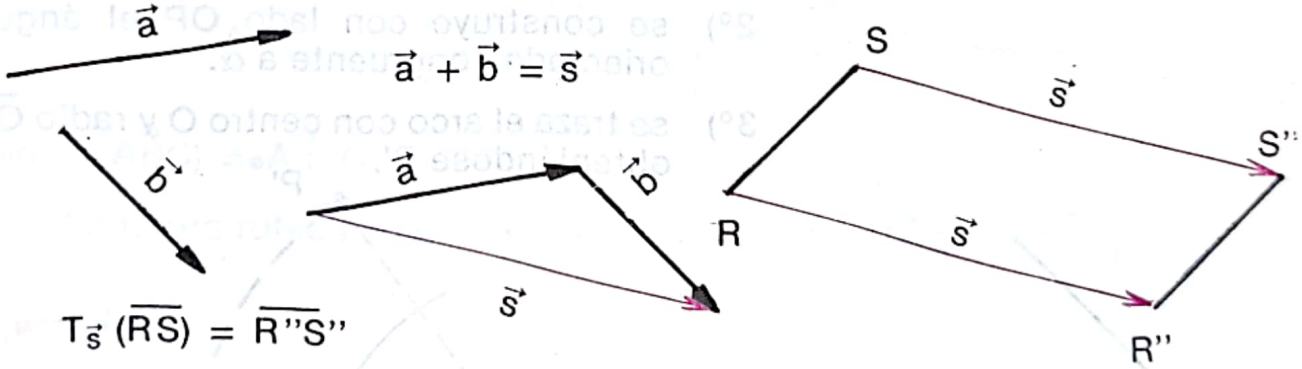


$$\left.\begin{array}{l} T_{\vec{a}}(\overline{RS}) = \overline{R'S'} \\ T_{\vec{b}}(\overline{R'S'}) = \overline{R''S''} \end{array}\right\} \quad T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}}(\overline{RS}) = \overline{R''S''}$$

Se lee: traslación de $\vec{a}$ compuesta con traslación de $\vec{b}$ aplicada a $\overline{RS}$, da como resultado $\overline{R''S''}$

- **Observación**

El resultado de la composición puede obtenerse aplicando una sola traslación cuyo vector es la suma $\vec{a} + \vec{b}$.

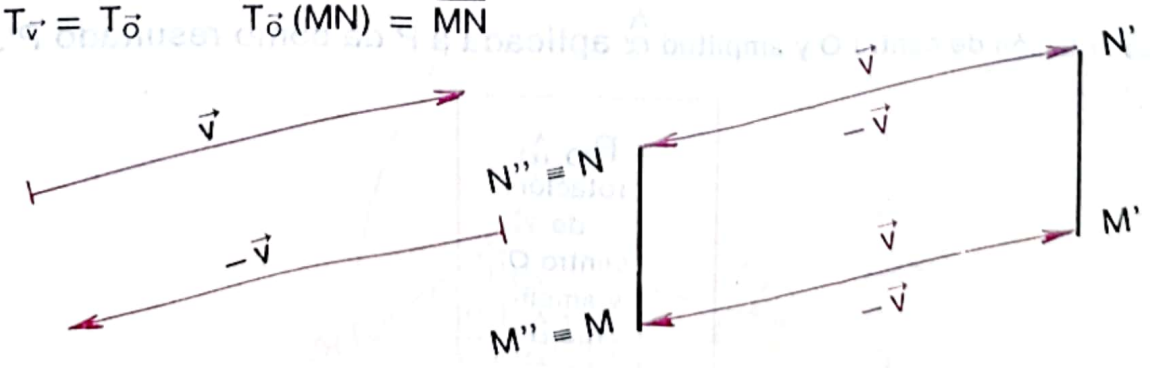


$T_{\vec{s}}(\overline{RS}) = \overline{R''S''}$

La composición de traslaciones de vectores opuestos es igual a la traslación de vector nulo, la que constituye la **traslación idéntica**.

$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{O}$

$T_{-\vec{v}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{O}} \qquad T_{\vec{O}}(\overline{MN}) = \overline{MN}$



Escaneado con CamScanner

ROTACION O GIRO

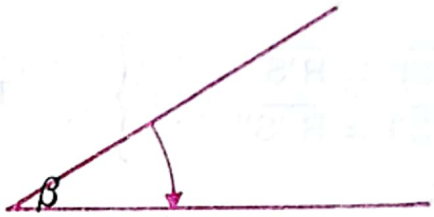
Es otro movimiento del plano que transforma al plano en sí mismo.

Para efectuar una rotación se elige un punto como centro de ella y un ángulo orientado que es el ángulo de giro o amplitud.

Todo ángulo con sentido, positivo o negativo, es un **ángulo orientado**.

Se conviene que el sentido **positivo** es el contrario al de las agujas de un reloj y **negativo** es el de las agujas.

$\hat{\alpha}$ (sentido positivo)



$\hat{\beta}$ (sentido negativo)

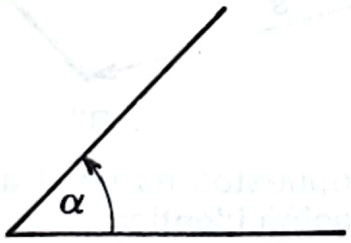
Al aplicar la rotación de centro O y amplitud $\hat{\alpha}$ a un punto P, se obtiene otro punto P' que es el rotado de P, o transformado de P por la rotación.

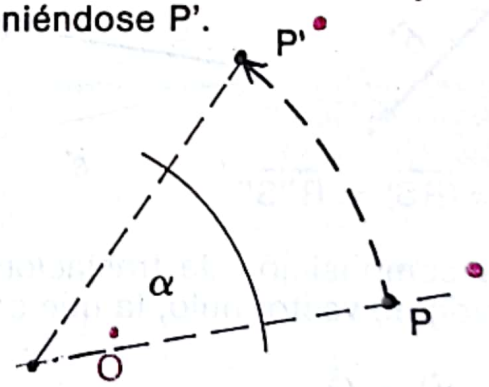
El punto P' se obtiene así:

1°) se traza $\overrightarrow{OP}$

2°) se construye con lado $\overrightarrow{OP}$ el ángulo orientado congruente a $\hat{\alpha}$.

3°) se traza el arco con centro O y radio $\overline{OP}$, obteniéndose P'.





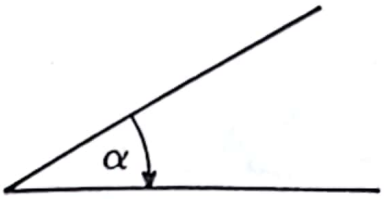
$R_{(O,\hat{\alpha})}(P) = P'$

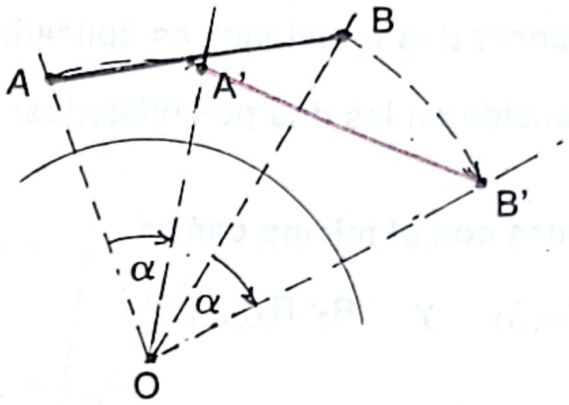
Se lee: rotación de centro O y amplitud $\hat{\alpha}$ aplicada a P da como resultado P'.

$R_{(O,\hat{\alpha})}$ rotación de centro O y amplitud $\hat{\alpha}$

Escaneado con CamScanner

Para aplicar rotación a un segmento se rotan sus extremos.

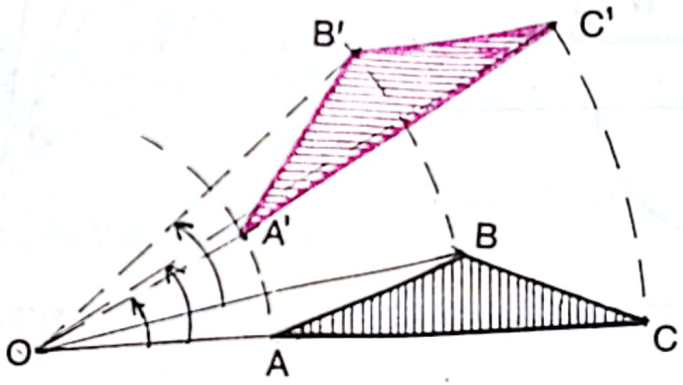




$R_{(O,\hat{\alpha})}(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$

• Puede demostrarse que el segmento rotado es congruente con el dado: $\overline{A'B'} = \overline{AB}$.

Para aplicar rotación a una figura se rotan los vértices de la misma.



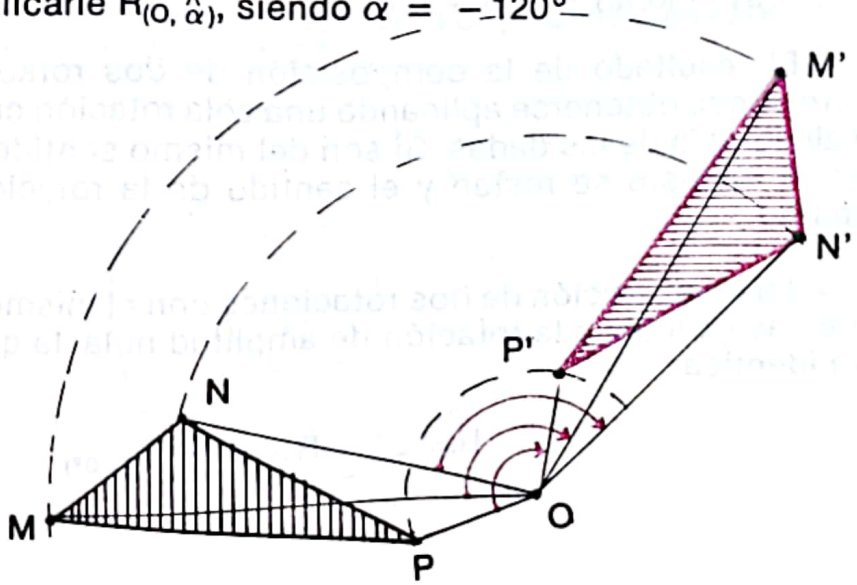
$R_{(O,\hat{\alpha})}(\hat{ABC}) = \hat{A'B'C'}$

La figura rotada es congruente con la dada: $\hat{A'B'C'} = \hat{ABC}$.

Ejercicio

7°) Dado $\hat{MNP}$ aplicarle $R_{(O,\hat{\alpha})}$, siendo $\hat{\alpha} = -120°$

Respuesta



Escaneado con CamScanner

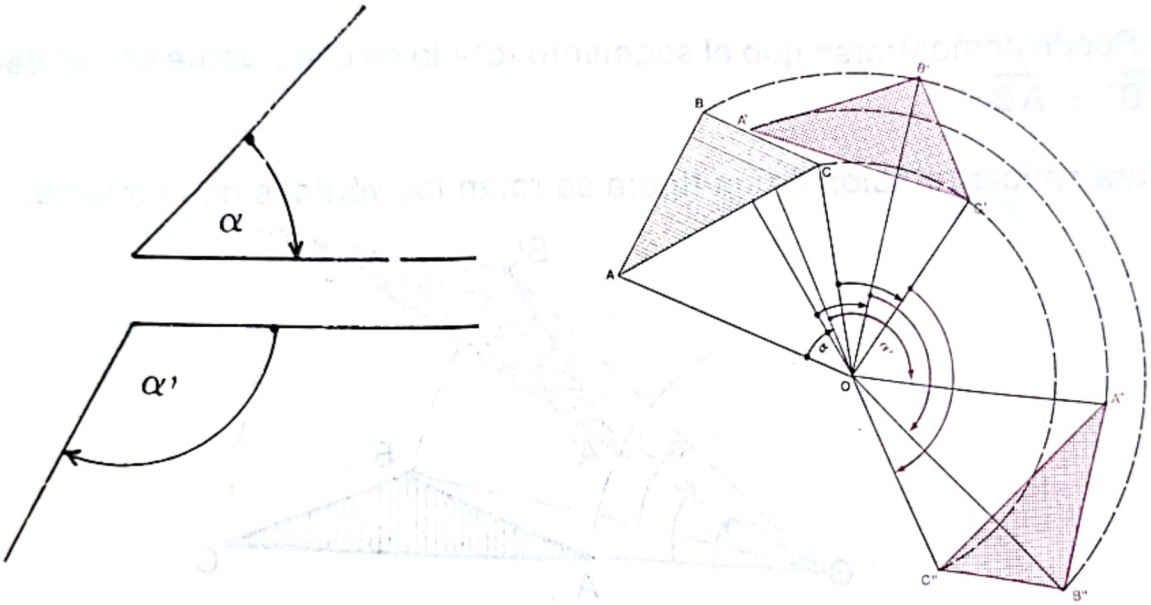
Composición de rotaciones

Componer dos rotaciones es aplicarlas sucesivamente.

Se consideran las dos posibilidades:

- **Rotaciones con el mismo centro**

$R_1: R_{(O, \hat{\alpha})}$ y $R_2: R_{(O, \hat{\alpha}')}$



$$\left.\begin{array}{l} R_1 (A\hat{B}C) = A'\hat{B}'C' \\ R_2 (A'\hat{B}'C') = A''\hat{B}''C'' \end{array}\right\} \quad R_2 \circ R_1 (A\hat{B}C) = A''\hat{B}''C''$$

$$R_{(O, \hat{\alpha})} \circ R_{(O, \hat{\alpha}')} = R_{(O, \hat{\alpha} + \hat{\alpha}')}$$

- El resultado de la composición de dos rotaciones con el mismo centro puede obtenerse aplicando una sola rotación cuya amplitud es la suma algebraica de las dadas. Si son del mismo sentido se suman, si son de sentido opuesto se restan y el sentido de la rotación es el de la mayor amplitud.

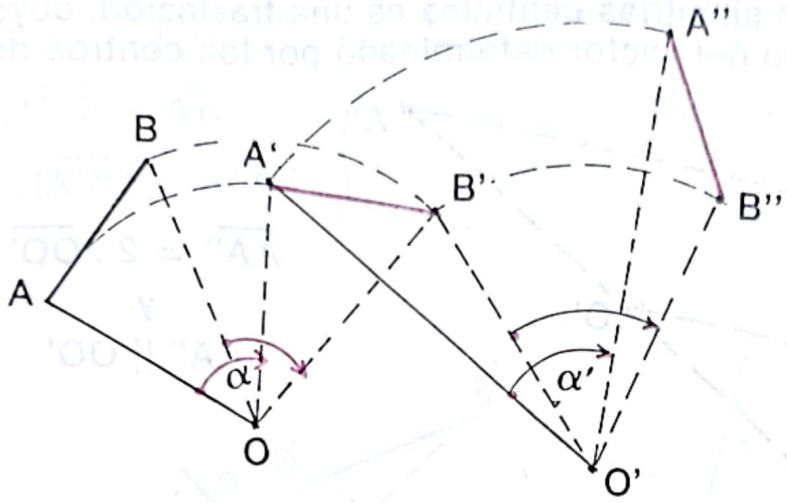
- La composición de dos rotaciones con el mismo centro y amplitudes opuestas es igual a la rotación de amplitud nula, la que constituye la rotación idéntica.

$$R_{(O, -\hat{\alpha})} \circ R_{(O, \hat{\alpha})} = R_{(O, 0^\circ)}$$

Escaneado con CamScanner

• Rotaciones con distintos centros

$R_1: R_{(O, \hat{\alpha})}$ y $R_2: R_{(O', \hat{\alpha}')}$ $\quad \hat{\alpha} = -50°$ $\quad \hat{\alpha}' = -80°$



$R_1 (\overline{AB}) = \overline{A'B'}$

$R_2 (\overline{A'B'}) = \overline{A''B''}$

• Observación

Las simetrías, la traslación y la rotación **son funciones** en el conjunto de puntos de un plano: a cada punto del plano le hacen corresponder uno y sólo un punto del mismo.

El dominio es el conjunto de puntos de la figura dada y el codominio es el conjunto de puntos de la transformada.

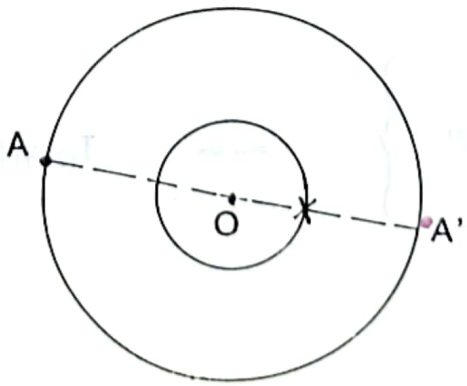
Son funciones **inyectivas** porque en cada movimiento, puntos no coincidentes tienen imágenes distintas.

Son funciones **suryectivas** porque cada punto es imagen de otro.

Luego, son funciones **biyectivas.**

Relaciones entre movimientos en el plano

• Toda **simetría de centro O** es una **rotación** cuyo **centro es el punto O** y cuya amplitud es de 180°, o bien $-180°$.



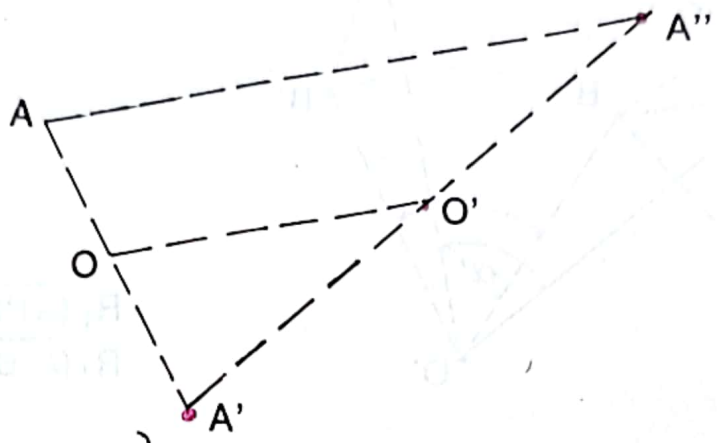
Escaneado con CamScanner

A' es simétrico de A con respecto a O.

A' es el rotado de A con centro O y amplitud 180°.

A' es el rotado de A con centro O y amplitud $-180°$.

• La composición de **dos simetrías centrales** es una **traslación**, cuyo vector es equipolente al duplo del vector determinado por los centros de simetría.



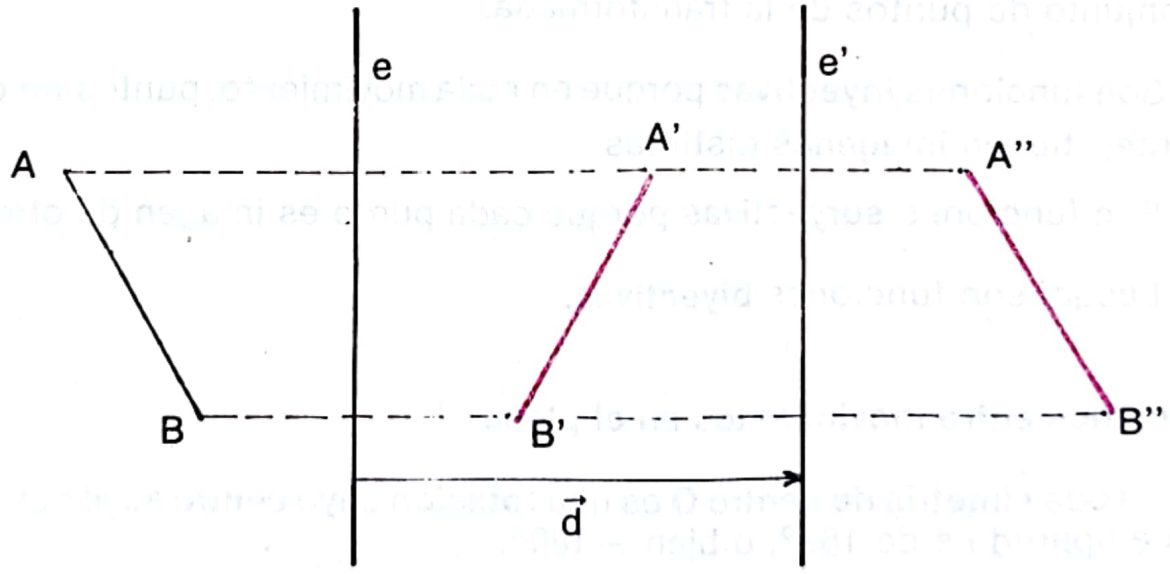
$\overline{AA''} = 2 \cdot \overline{OO'}$

y

$AA'' \parallel OO'$

$$\left.\begin{array}{l} S_{(O)}\, A = A' \\ S_{(O')}\, A' = A'' \end{array}\right\} \Longrightarrow T_{(2 \cdot \vec{OO'})}(A) = A''$$

• La composición de **dos simetrías axiales** de **ejes paralelos** es una **traslación**, cuyo vector es el duplo de la distancia entre los ejes.



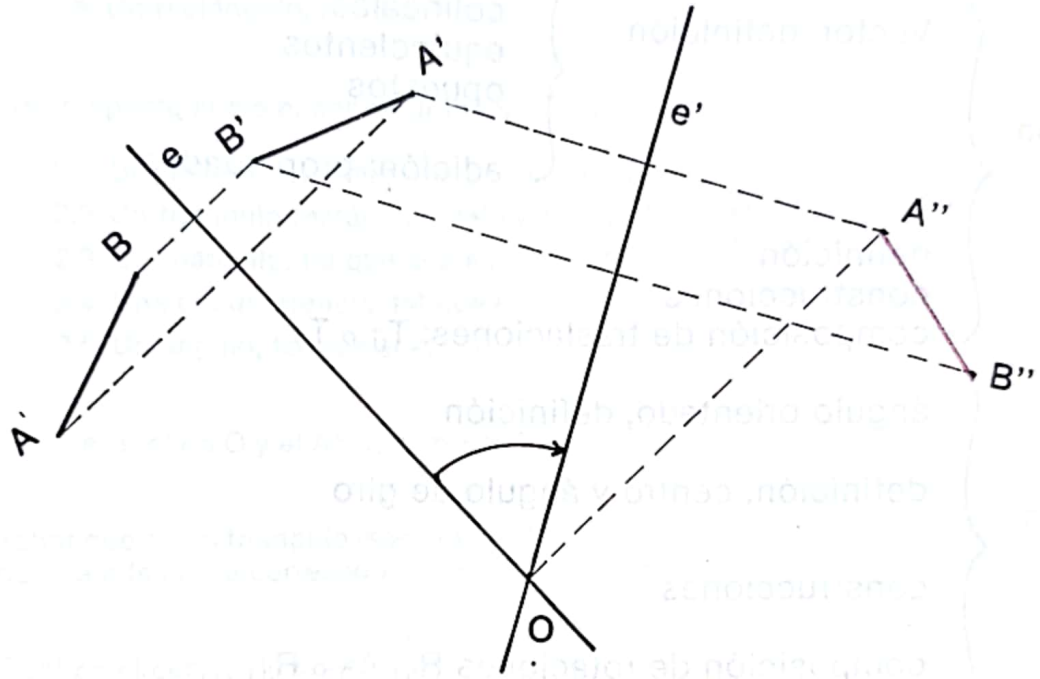
$$\left.\begin{array}{l} S_{(e)}(\overline{AB}) = \overline{A'B'} \\ S_{(e')}(\overline{A'B'}) = \overline{A''B''} \\ \vec{AA''} = 2\,\vec{d} \end{array}\right\} \Longrightarrow T_{(2 \cdot \vec{d})}(\overline{AB}) = \overline{A''B''}$$

Escaneado con CamScanner

• La composición de **dos simetrías axiales** cuyos **ejes se cortan** es una **rotación**, cuyo centro es el punto de intersección de los ejes y cuya amplitud es doble del ángulo que ellos forman.

$$\left.\begin{array}{l} e \cap e' = \{ O \} \\ S_{(e)}(\overline{AB}) = \overline{A'B'} \\ S_{(e')}(\overline{A'B'}) = \overline{A''B''} \end{array}\right\} \Longrightarrow R_{(O, \hat{\alpha})}(\overline{AB}) = \overline{A''B''}$$

$$\hat{\alpha} = 2 \cdot \hat{ee'}$$



$$A\hat{O}A'' = 2 \cdot \hat{ee'}$$

En la figura $\hat{ee'} = -60°$

$$\hat{\alpha} = -120°$$

Escaneado con CamScanner

SÍNTESIS 2

Transformaciones en el plano

Simetrías S_o y S_e

- Central y axial
  - Definiciones
  - Construcciones
  - Propiedades de las figuras simétricas
- **Centro y eje de simetría de una figura**

Traslación $T_{\vec{v}}$

- Vector, definición
  - nulo
  - colineales
  - equipolentes
  - opuestos
  - adición: propiedades
- definición
- construcciones
- composición de traslaciones: $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$

Rotación $R_{(O, \hat{\alpha})}$

- ángulo orientado, definición
- definición, centro y ángulo de giro
- construcciones
- composición de rotaciones $R_{(O, \hat{\alpha}')} \circ R_{(O, \hat{\alpha})}$

Los movimientos como funciones

Relaciones entre movimientos en el plano

Escaneado con CamScanner

PRACTICA 2

Transformaciones en el plano

Objetivo operacional: aplicar simetrías.

1°) Con centro O, construir los simétricos de:

1.1 Una recta r, tal que $O \notin r$.
1.2 Un ángulo agudo, tal que O es exterior a él.
1.3 Una circunferencia, y O exterior a ella.
1.4 Un triángulo isósceles, tal que O coincide con un vértice.
1.5 Un rectángulo, siendo O el punto de intersección de las diagonales.

2°) Con respecto al eje e, construir los simétricos de:

2.1 Un triángulo, tal que uno de los vértices pertenece al eje.
2.2 Un triángulo rectángulo, tal que el eje incluye a uno de los catetos.
2.3 Un triángulo, tal que el eje sea una mediatriz del mismo.
2.4 Una circunferencia, tal que el eje incluye a un diámetro de ella.
2.5 Un ángulo, tal que el eje corta a sus lados.

3°) Dados $e \perp e'$ en O y el $\hat{ABC}$, componer las simetrías $S_O \circ S_e \circ S_O (\hat{ABC})$

4°) Probar que en un triángulo isósceles, los simétricos de los vértices con respecto a la recta que incluye a la altura correspondiente a la base, son vértices del mismo.

5°) ¿Cuál es el centro de simetría de un segmento?

6°) ¿Cuál es el eje de simetría de un segmento?

7°) ¿Cuál es el eje de simetría de un ángulo? Justificar la respuesta.

Objetivo operacional: aplicar traslaciones.

8°) Aplicar a $C_{(O,r)}$ traslación de vector con módulo mayor que r.

9°) Trasladar dos rectas oblicuas con vector arbitrario.

10°) Dado $\hat{ABC}$ aplicarle traslación de vector.

$\vec{v} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BH}$ siendo $\overline{BH}$ altura en el triángulo.

Objetivo operacional: aplicar rotaciones.

11°) Aplicar a r rotación de centro O y amplitud $\hat{\alpha} = 90°$, tal que $O \notin r$.

Escaneado con CamScanner

12°) Dado el cuadrado ABCD rotarlo con centro **O** intersección de sus diagonales, y amplitud $\overset{\wedge}{\alpha} = -45°$.

13°) Dado el paralelogramo MNPQ rotarlo con centro **O** coincidente con **Q** y amplitud $\overset{\wedge}{\alpha} = 180°$.

14°) Indicar si la figura rotada en el ejercicio anterior puede obtenerse por otro movimiento.

Objetivo operacional: relacionar movimientos.

15°) Aplicar $S_{e'} \circ S_e\,(\overline{AB})$. Verificar que si $e \cap e' = \{O\}$ el resultado es el mismo si se aplica $R_{(O\ 2\overset{\frown}{ee'})}\,(\overline{AB})$.

16°) Aplicar $S_{O'} \circ S_O\,(\overline{MN})$ y verificar que es igual a $T_{2\overrightarrow{OO'}}\,(\overline{MN})$.

17°) Aplicar $R_2 \circ R_1\,(\overline{PQ})$ siendo $R_1 = R_{(O,\overset{\frown}{\alpha})}$ y $R_2 = R_{(O',\overset{\frown}{\alpha'})}$, $\overset{\wedge}{\alpha} = 80°$, $\overset{\wedge}{\alpha'} = 40°$.

Ejercicios para que el alumno evalúe sus conocimientos

18°) ¿Cuándo dos puntos son simétricos con respecto a un centro?

19°) ¿Cuándo con respecto a un eje?

20°) ¿Cómo se obtiene un polígono simétrico de otro dado con respecto a un centro? ¿y a un eje?

21°) Dos figuras simétricas con respecto a un centro o a un eje, son congruentes:

a) nunca
b) siempre
c) a veces

Elegir la respuesta correcta.

22°) ¿Cuál es el centro de simetría de una circunferencia? ¿Cuántos centros de simetría tiene una circunferencia?

23°) ¿Cuántos ejes de simetría admite una circunferencia, y cuáles son?

24°) El centro de simetría de una circunferencia, ¿es también centro de simetría del círculo respectivo?

25°) Si dos circunferencias tienen el mismo centro de simetría, ¿cuál es la posición de las mismas?

Escaneado con CamScanner

26°) Si varias circunferencias tienen el mismo eje de simetría, ¿cuál es la posición de sus centros? Ejemplificar con una figura.

27°) ¿Cuántos centros y ejes de simetría tiene una recta, y cuántos una semirrecta?, y ¿cuáles son?

28°) ¿Cómo queda caracterizado un vector?

29°) ¿Cuándo dos vectores son equipolentes?

30°) ¿Cuándo dos vectores son opuestos?

31°) ¿Cuál es el elemento neutro en la adición de vectores?

32°) ¿Qué es un ángulo orientado?

33°) ¿Cómo se obtiene el polígono rotado de uno dado?

34°) Por la traslación y la rotación se obtienen figuras congruentes a las dadas:

a) a veces
b) nunca
c) siempre

Elegir la respuesta correcta.

35°) Si $(A,A') \in S(e)$ y $(B,B') \in S(e)$ indicar la relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$. Justificar.

36°) Siendo el dominio, el conjunto de puntos del $\overset{\Delta}{ABC}$, y la función una simetría central, ¿cuál es el codominio?

37°) ¿Existe la función inversa de la anterior? En caso afirmativo, ¿cuál es?

38°) Si la función es traslación de $\vec{v}$, y el dominio el conjunto de los puntos de $\overline{AB}$, responder:

38.1 ¿Cuál es el codominio?
38.2 ¿Cuál es f^{-1}?
38.3 Clasificar la función f.

39°) Nombrar dos pares ordenados que pertenecen a la función rotación R aplicada a $\overrightarrow{PQ}$.

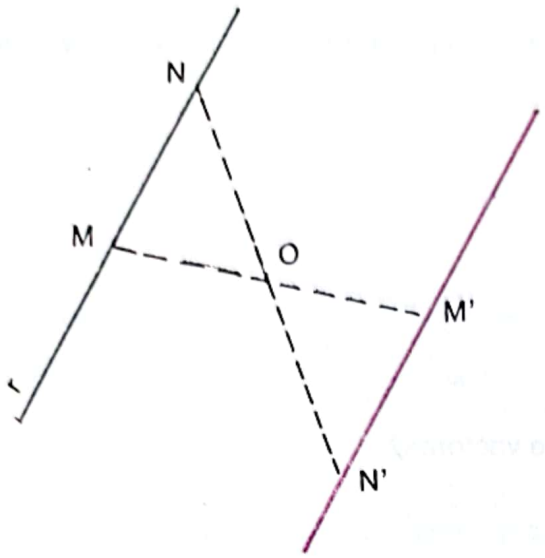
40°) Si el dominio de la función es $C_{(O,r)}$ y la función es la rotación de centro O y amplitud $\overset{\wedge}{\alpha} = 30°$, definir el codominio.

• Se recomienda al alumno preparar y resolver ejercicios tomando como modelo los de la práctica, por ejemplo los ejercicios 1°, 2°, 13°, 15°, 16°, 17°.

Escaneado con CamScanner

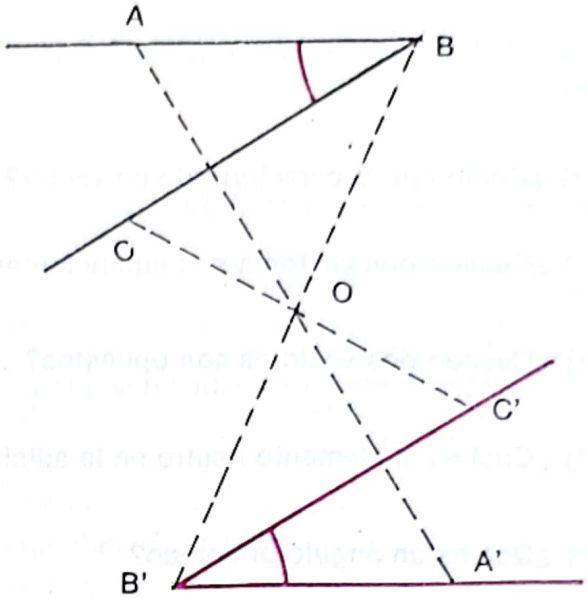
RESPUESTAS PRÁCTICA 2

1.1



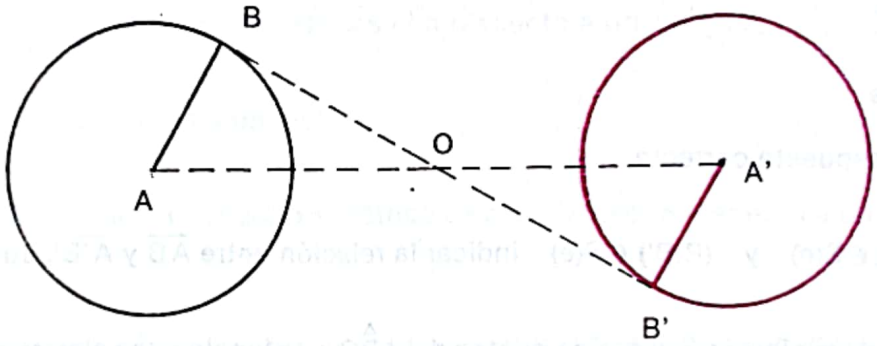
$S_O(r) = r'$

1.2



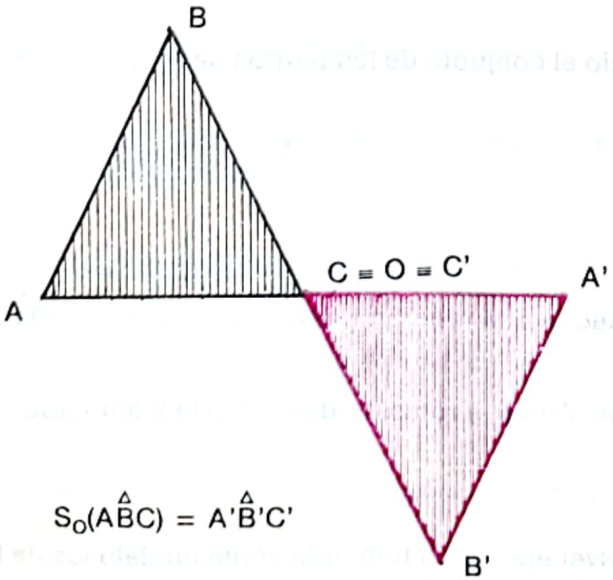
$S_O(A\hat{B}C) = A'\hat{B}'C'$

1.3



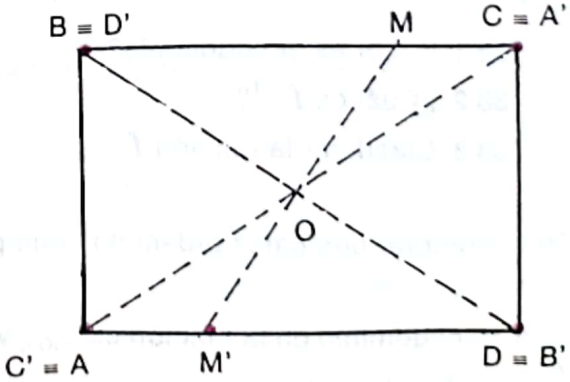
$S_O(C_{(A, \overline{AB})}) = C_{(A', \overline{A'B'})}$

1.4



$S_O(A\hat{B}C) = A'\hat{B}'C'$

1.5

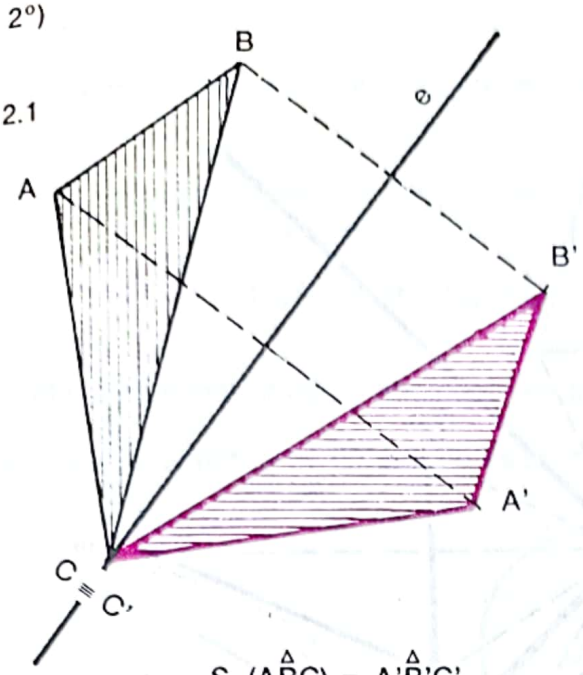


$S_O(\overline{ABCD}) = \overline{C'B'A'D'}$

Escaneado con CamScanner

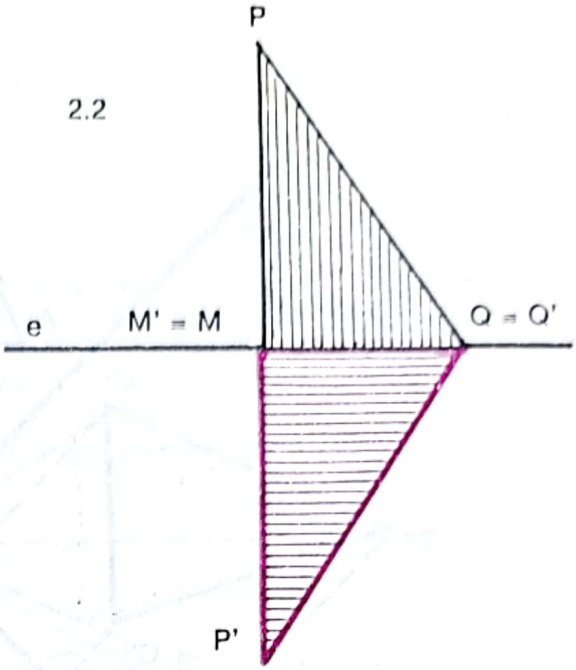
2°)

2.1



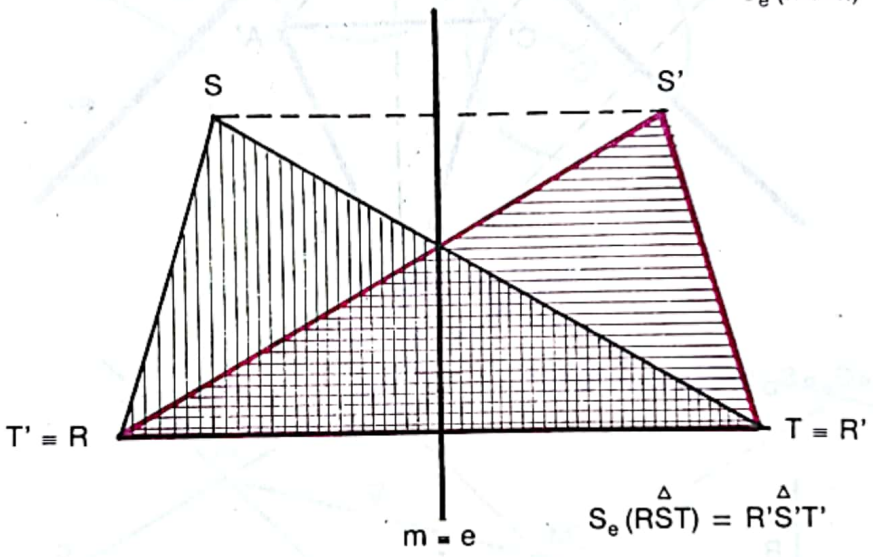
$S_e(\overset{\triangle}{ABC}) = \overset{\triangle}{A'B'C'}$

2.2



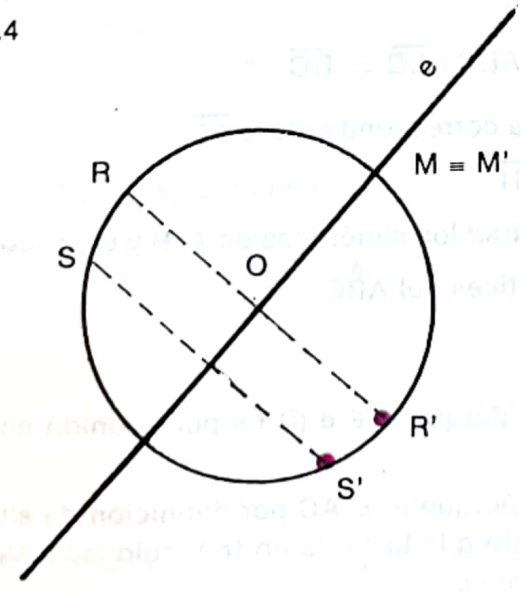
$S_e(\overset{\triangle}{MPQ}) = \overset{\triangle}{M'P'Q'}$

2.3

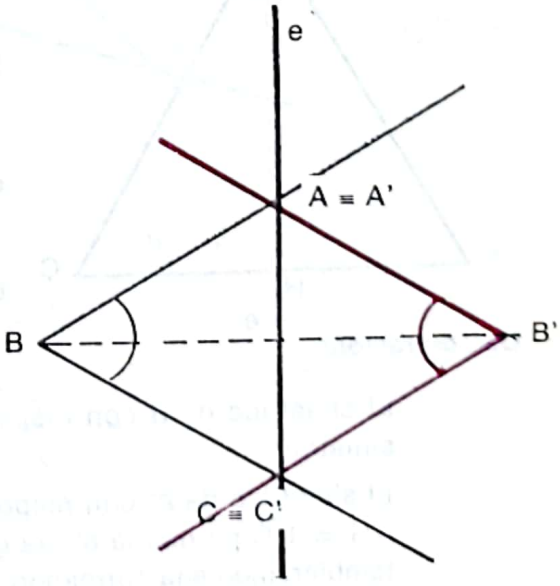


$S_e(\overset{\triangle}{RST}) = \overset{\triangle}{R'S'T'}$

2.4



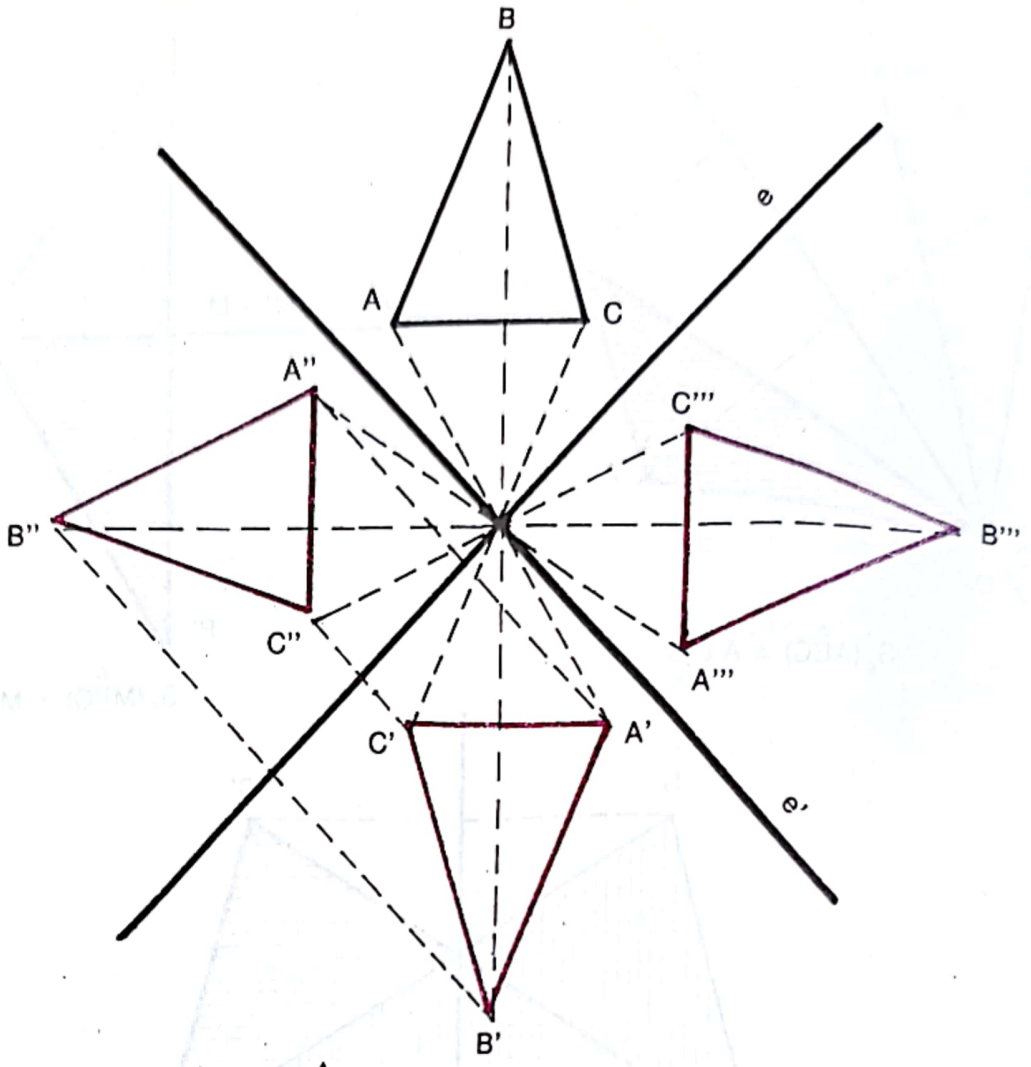
$S_e(C_{(O,r)}) = C_{(O,r)}$



$S_e(\overset{\wedge}{ABC}) = \overset{\wedge}{A'B'C'}$

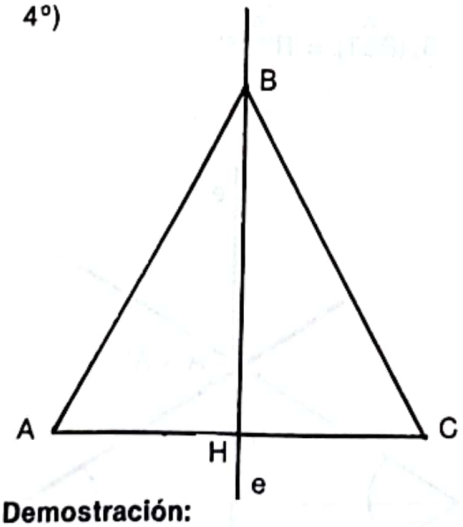
Escaneado con CamScanner

3°)



$S_O \circ S_e \circ S_O (\overset{\Delta}{ABC}) = \overset{\Delta}{A''B''C''}$

4°)



Información: $\overset{\Delta}{ABC}$ / $\overline{AB} = \overline{BC}$

$\overline{BH}$ altura correspondiente a $\overline{AC}$

e incluye a $\overline{BH}$

A demostrar: los simétricos de A, B y C con respecto a **e** son vértices del $\overset{\Delta}{ABC}$.

Demostración:

El simétrico de **B** con respecto a **e** es **B** porque **B** $\in$ **e** (B es punto unido en esta simetría).

El simétrico de **A**, con respecto a **e** es **C** porque e $\perp$ AC por definición de altura y $\overline{AH} = \overline{HC}$ porque la altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles es también mediana correspondiente a la misma.

Análogamente, el simétrico de **C** con respecto a **e** es **A**.

Escaneado con CamScanner

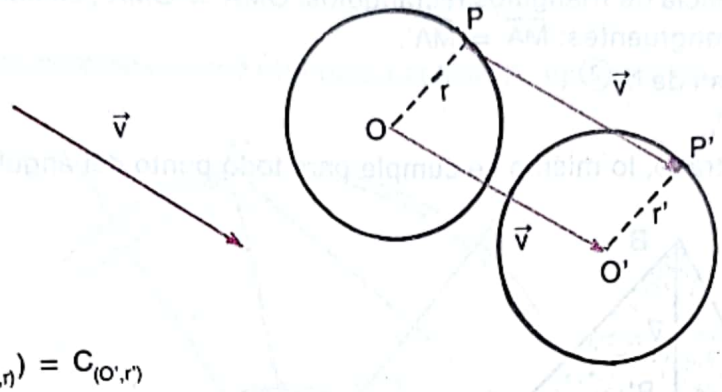
5°) El centro de simetría de un segmento es su punto medio.

$S_M(A) = B$, $S_M(M) = M$, $S_M(B) = A$, $S_M(R) = R'$

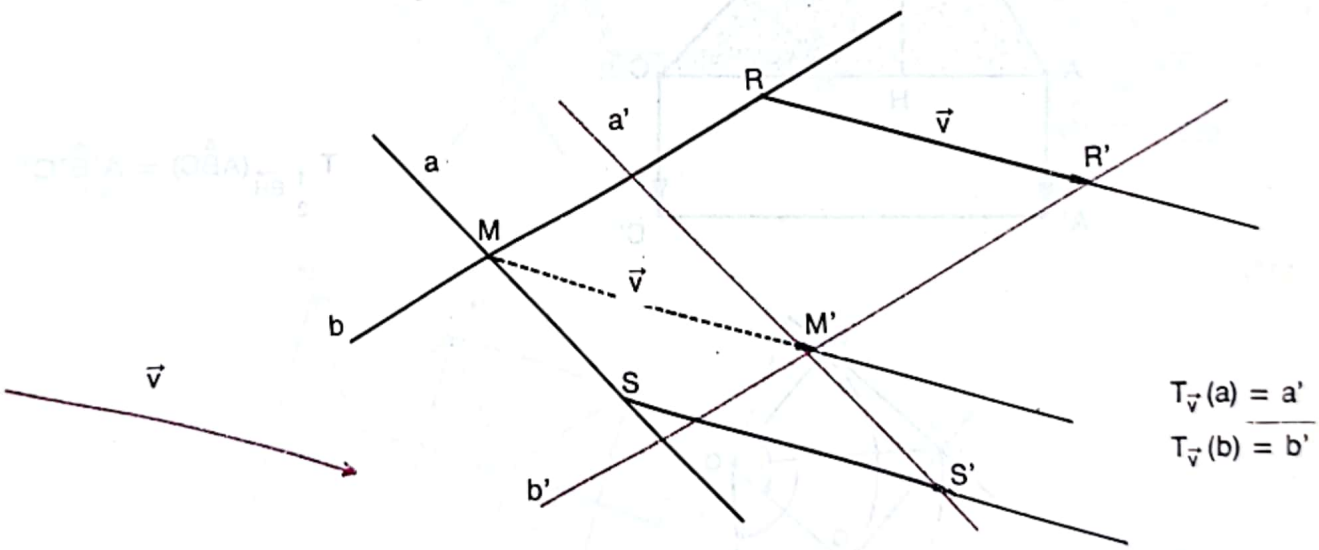
6°) El eje de simetría de un segmento es su mediatriz.

7°) El eje de simetría de un ángulo es la recta que incluye a su bisectriz.

8°)



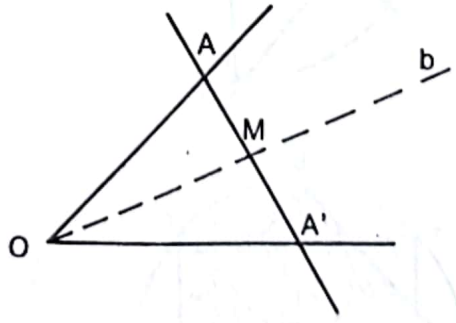
$T_{\vec{v}}(C_{(O,r)}) = C_{(O',r')}$



$T_{\vec{v}}(a) = a'$

$T_{\vec{v}}(b) = b'$

$S_b(O) = O$, (O es punto unido).



Se considera un punto A que pertenece a un lado del ángulo.
Se traza AM ⊥ b, cuya intersección con el otro lado del ángulo es A'.
A y A' resultan simétricos con respecto a **b**, en efecto: A y A' pertenecen a la perpendicular a **b** por construcción ① .

Escaneado con CamScanner

Además,

$\overset{\triangle}{OMA}$ y $\overset{\triangle}{OMA'}$ rectáng. en $\hat{M}$ y $\hat{M}$

$\overline{OM} = \overline{OM}$ propiedad reflexiva

$A\hat{O}M = A'\hat{O}M$ por ser **b** bisectriz

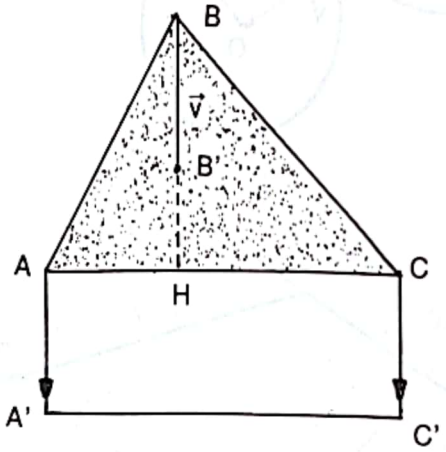
Por 2° criterio de congruencia de triángulos rectángulos: $\overset{\triangle}{OMA} = \overset{\triangle}{OMA'}$, en consecuencia los catetos homólogos son congruentes: $\overline{MA} = \overline{MA'}$.

Entonces, A y A' equidistan de **b** ②.

Por ① y ②, $S_b(A) = A'$.

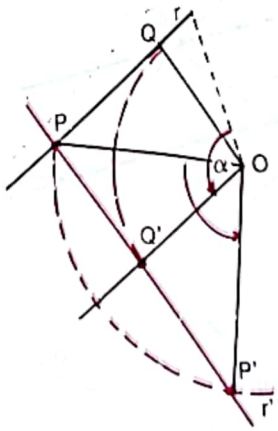
Como A es un punto arbitrario, lo mismo se cumple para todo punto del ángulo.

10°)



$T_{\frac{1}{2}\vec{BH}}(\overset{\triangle}{ABC}) = \overset{\triangle}{A'B'C'}$

11°)

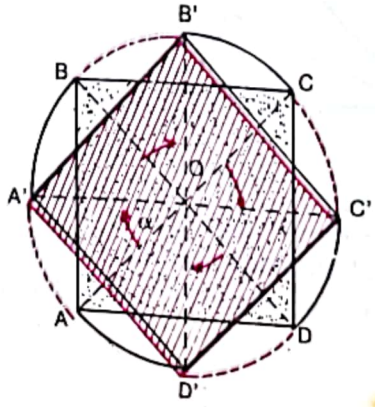


$\hat{\alpha} = 90°$

$R_{(O,\hat{\alpha})}(r) = r'$

$P\hat{O}P' = 90°$, $Q\hat{O}Q' = 90°$

12°)

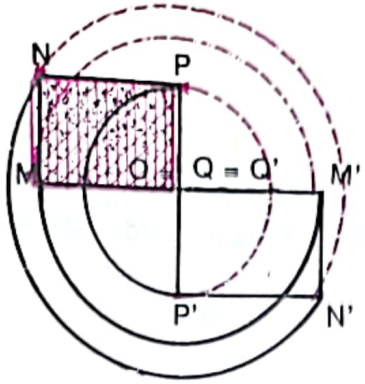


$\hat{\alpha} = -45°$

$R_{(O,\hat{\alpha})}(\square ABCD) = \square A'B'C'D'$

Escaneado con CamScanner

13°)

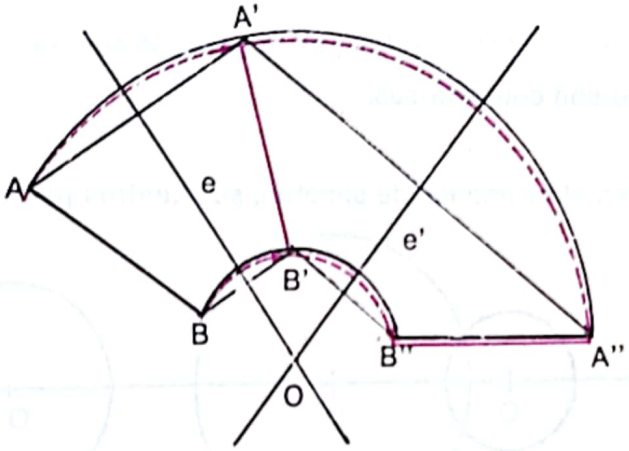


$\hat{\alpha} = 180°$

$R_{(O,\hat{\alpha})}(\overline{MNPQ}) = \overline{M'N'P'Q'}$

14°) Sí, la figura rotada puede obtenerse aplicando una simetría de centro O a la dada.

15°)

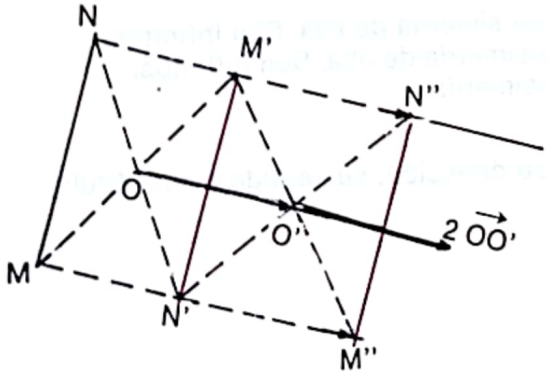


$S_{e'} \circ S_e (\overline{AB}) = \overline{A''B''}$

$R_{(O,\ 2\hat{e}e')}(\overline{AB}) = \overline{A''B''}$

$\hat{AOA''} = 2\hat{e}e'$

16°)

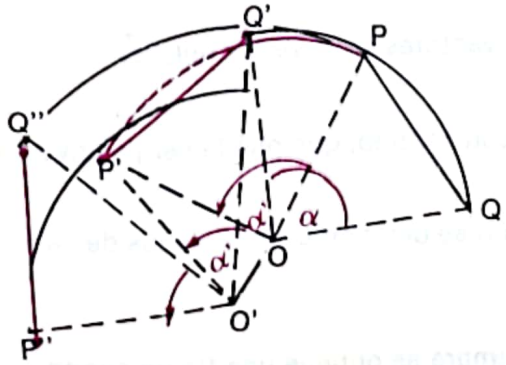


$S_{O'} \circ S_O (\overline{MN}) = \overline{M''N''}$

$T_{2\overrightarrow{OO'}}(\overline{MN}) = \overline{M''N''}$

$2\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{MN''}$

17°)



$R_{1\ (O,\hat{\alpha})}(\overline{PQ}) = \overline{P'Q'}$

$R_{2\ (O',\hat{\alpha}')}(\overline{P'Q'}) = \overline{P''Q''}$

Escaneado con CamScanner

18°) Consultar texto.

19°) Consultar texto.

20°) Para obtener el simétrico de un polígono con respecto a un centro o a un eje se determinan los simétricos de cada vértice y luego se los une ordenadamente.

21°) b) **Siempre** son congruentes.

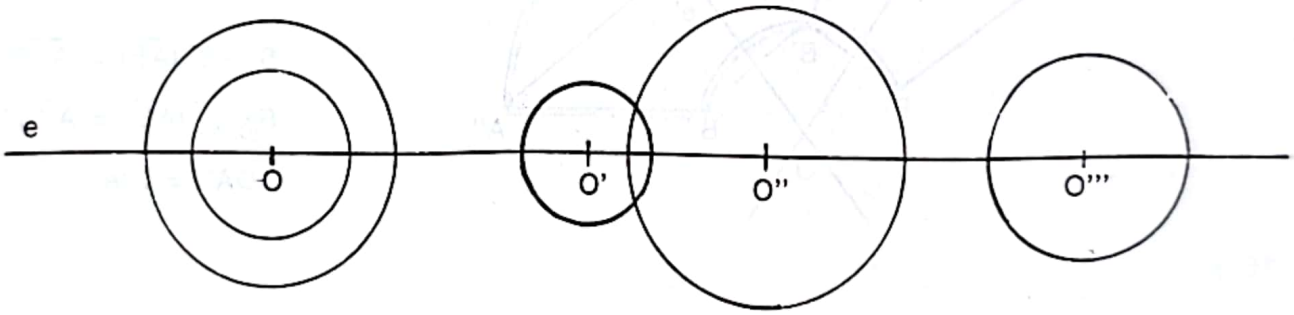
22°) El centro de simetría de una circunferencia es el centro de la misma, es único.

23°) Una circunferencia admite infinitos ejes de simetría, que son cada una de las rectas que incluyen a un diámetro.

24°) Sí, el centro de simetría de una circunferencia es centro de simetría del círculo respectivo.

25°) Tienen el mismo centro, luego son concéntricas.

26°) Si varias circunferencias tienen el mismo eje de simetría, sus centros pertenecen a él.



27°) Todo punto de una recta es centro de simetría de ella. Son infinitos.
Toda perpendicular a una recta es eje de simetría de ella. Son infinitos.
Una semirrecta no tiene centro ni eje de simetría.

28°) Un vector queda caracterizado por su dirección, su sentido y su módulo.

29°) Consultar texto.

30°) Consultar texto.

31°) El elemento neutro en la adición de vectores es el vector nulo: $\vec{O}$

32°) Un ángulo orientado es un ángulo con sentido, que puede ser positivo o negativo.

33°) Para obtener el rotado de un polígono se determinan los rotados de cada vértice y luego se los une ordenadamente.

34°) c) Por la traslación y la rotación **siempre** se obtiene una figura congruente a la dada.

Escaneado con CamScanner

35°) $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, por ser segmentos simétricos con respecto al eje.

36°) El codominio es el conjunto de puntos del $A'\hat{B}'C'$ simétrico del $A\hat{B}C$ por dicha simetría.

37°) Sí. Es la misma simetría cuyo dominio es $A'\hat{B}'C'$ y cuyo codominio es $A\hat{B}C$.

38°) 38.1 El codominio es el conjunto de puntos de $\overline{A'B'}$, trasladado de $\overline{AB}$ por $T_{\vec{v}}$.

38.2 f^{-1} es la traslación del vector $-\vec{v}$: $T_{-\vec{v}}$.

38.3 f es función biyectiva.

39°) $(P;P') \in R$ y $(Q;Q') \in R$, siendo P' y Q' los rotados de P y Q respectivamente.

40°) El codominio es el conjunto de puntos de la misma $C_{(O,\ r)}$.

Escaneado con CamScanner

Propuesta para una prueba de evaluación

1°) A una $\overrightarrow{OA}$ aplicar:

1.1 simetría de centro O
1.2 rotación de centro O y amplitud $\hat{\alpha} = -40°$
1.3 traslación de $\vec{v}$ (arbitrario)

2°) En un triángulo equilátero, trazar sus alturas, responder verdadero o falso, y justificar.

2.1 El punto de intersección de las alturas es centro de simetría.
2.2 La recta que contiene a una de las alturas es eje de simetría.

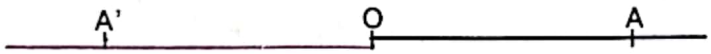
3°) Justificar que los movimientos estudiados son funciones biyectivas.

Evaluación:

1°: 3 puntos
2°: 4 puntos
3°: 3 puntos

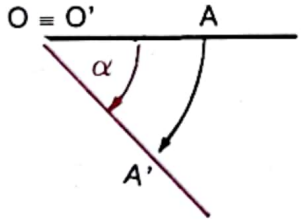
Respuestas

1.1



$S_O(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$

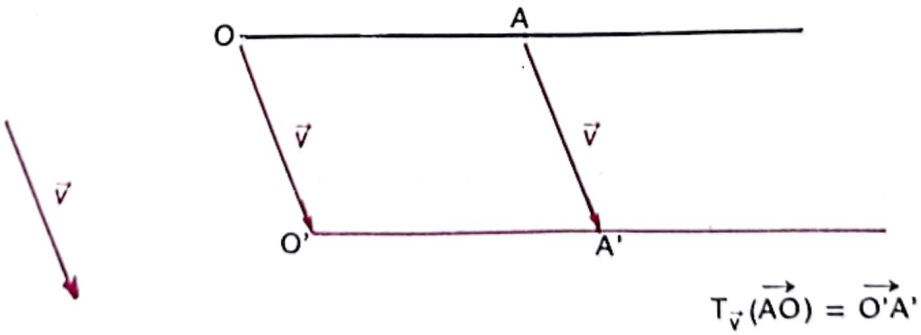
1.2



$\hat{\alpha} = -40°$

$R_{(O,\hat{\alpha})}(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{O'A'}$

1.3

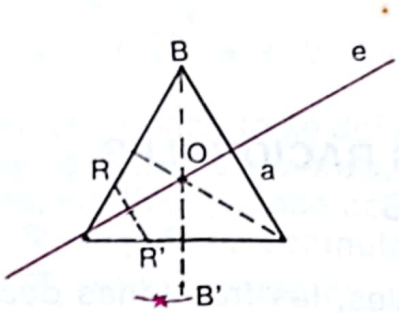


$T_{\vec{v}}(\overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{O'A'}$

Escaneado con CamScanner

2.1 F_{Δ} porque el simétrico de un vértice no pertence a la figura $S_O(B) = B'$ y $B' \notin \overset{\Delta}{ABC}$

2.2 V, porque el simétrico de todo punto del triángulo pertenece a él.



$h_a \subset e$

$S_e(B) = C$

$S_e(A) = A$

$S_e(C) = B$

$S_e(R) = R'$

3°) Consultar texto.

Escaneado con CamScanner